



# D-최적 실험 설계 기반 최적 센서 배치 및 모델 확장 기법을 이용한 하중 추정

변성주<sup>1</sup>·이승재<sup>2</sup>·부승환<sup>2,†</sup>  
한국해양대학교 조선해양시스템공학과 대학원<sup>1</sup>  
한국해양대학교 조선해양시스템공학과<sup>2</sup>

## Load Recovery Using D-Optimal Sensor Placement and Full-Field Expansion Method

Seong-Ju Byun<sup>1</sup>·Seung-Jae Lee<sup>2</sup>·Seung-Hwan Boo<sup>2,†</sup>  
Graduate School, Department of Naval Architecture and Ocean Systems Engineering, Korea Maritime and Ocean University<sup>1</sup>  
Department of Naval Architecture and Ocean Systems Engineering, Korea Maritime and Ocean University<sup>2</sup>

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

To detect and prevent structural damage caused by various loads on marine structures and ships, structural health monitoring procedure is essential. Estimating loads acting on the structures which are measured by sensors that are mounted properly are crucial for structural health monitoring. However, attaching an excessive number of sensors to the structure without consideration can be inefficient due to the high costs involved and the potential for inducing structural instability. In this study, we introduce a method to determine the optimal number of sensors and their optimized locations for strain measurement sensors, allowing for accurate load estimation throughout the structure using model expansion method. To estimate the loads exerted on the entire structure with minimal sensors, we construct a strain-load interpolation matrix using the strain mode shapes of the finite element (FE) model and select the optimal sensor locations by applying D-Optimal Design and the row exchange algorithm. Finally, we estimate the loads exerted on the entire structure using the model expansion method. To validate the proposed method, we compare the results obtained by applying the optimal sensor placement and model expansion method to an FE model subjected to arbitrary loads with the loads exerted on the entire FE model, demonstrating efficiency and accuracy.

**Keywords** : Digital twin(디지털트윈), Structural health monitoring(구조 건전성 모니터링), Optimal sensor placement(최적 센서 배치), Structural dynamic analysis(구조물 동적해석), Model expansion method(모델 확장 기법)

## 1. 서론

디지털 트윈(Digital twin)은 물리적인 시스템이나 프로세스를 복제하여 가상의 트윈을 생성하는 기술을 말하며, 조선해양 분야에서는 센서 데이터, 제어 시스템, 그리고 빅 데이터 기술과 결합하여 구조물 건전성 모니터링에 적용하려는 시도가 이루어지고 있다 (Jones and Snider, 2020). 이를 통해, 실제 시스템의 상태를 정확하게 분석, 예측할 수 있으며, 선박 및 해양 구조물의 운용 환경에서 발생하는 동적 하중에 신속하게 대응하여 실시간 구조 모니터링을 할 수 있다 (Arrichiello and Gualeni, 2020).

유한요소법(Finite Element Method, FEM)은 디지털 트윈을

활용한 구조안전성 평가에서 주요한 역할을 담당한다. 유한요소 모델(FE model)은 트윈 모델로서 현실 구조물의 물리적 특성을 반영하게 되고, 이를 기반으로 구조물의 응력, 변형, 그리고 기타 중요한 물리적 특성을 정확하게 예측하는 데 활용된다.

구조건전성 모니터링에서 가장 핵심이 되는 요소는 구조물에 가해지는 하중을 높은 정확도로 추정함에 있다. 이렇게 정확한 하중 추정이 이루어진 후, 운영 중인 구조물의 응력, 변형, 진동 특성 등을 계산할 수 있으며, 구조물의 안전성과 신뢰성을 유지 하면서 예상치 못한 문제에 대처할 수 있는 기반을 마련할 수 있다. 그뿐만 아니라, 구조물의 잔존 예상 수명을 예측, 평가하고 적절한 유지보수 계획의 수립을 용이하게 한다. 하지만, 구조물은 대부분

복잡한 형태의 동적 하중을 경험하게 되며, 이러한 동적 하중에 대한 평가는 어려울 수 있다.

대표적인 하중 추정 방법은 D-최적 설계(D-optimal design) 기반의 역법(Inverse method)이 있다 (Johnson and Nachtsheim, 1983). 이 방법에서는 D-최적 설계를 통해 구조물에 부착될 센서의 위치를 결정하였고, 부착된 센서 위치에서 변형률을 측정 한 후, 역법을 통해 구조물에 가해지는 하중을 추정하였다. 이 과정에서 센서의 위치는 반복적인 실험을 통해 결정되고, 이에 따라 특정 목적 함수들이 최대화되거나 최소화되도록 하였다. 그리고 이 특정 목적 함수들은 하중 추정의 정확성과 매우 연관이 깊은 것으로 알려졌다. 이 방법에 대한 설명은 2장에서 보다 상세히 기술한다.

Desanghere는 주파수 영역의 Inverse method를 이용한 하중 추정과 관련된 문제를 연구하였다. 결과적으로 특정 위치에서의 응답이 구조물의 특정 모드에 의해 지배적으로 작용하고, 이는 센서의 위치에 따라 응답 함수 행렬의 조건에서 오차가 발생, 결과적으로 구조물에 가해지는 하중 추정 정확도에 영향을 미친다는 것을 명시하였다 (Desanghere, 1983).

구조물에 부착된 센서 계측 값을 통한 하중 추정 문제를 inverse method로 해결하는 기법은 Busby와 Trujillo에 의해 제안되었다 (Busby and Trujillo, 1987). 이는 추정된 구조적 응답과 측정된 구조적 응답 간의 차이를 최소화하였고, 10 자유도 cantilever beam 모델에 적용하여 효율성을 검증했다. 하지만 해당 연구는 구조물의 크기가 커지고 복잡해질수록 전산 효율성 및 정확도가 현저히 낮아진다는 단점을 가지고 있다.

이를 해결하기 위해 Gupta는 부분구조화 기반의 Reduced order model(ROM) 기법 (Craig and Bampton, 1968)을 이용하여, 구조물에 부착된 변형률 센서 계측 값을 통해 하중 추정을 하였다 (Gupta, 2013). 구조물에 가해지는 하중에 따라 발생하는 응답은 구조물의 특정 모드에 영향을 받기 때문에 구조물의 가장 지배적인 모드만을 이용하여 하중 추정을 효율적으로 진행하였다.

앞서 언급한 기법들은 구조물의 크기와 복잡성이 커짐에 따라 하중 추정의 정확도가 떨어지는 단점을 보이며, 센서가 부착된 위치에서의 하중 추정은 비교적 정확하지만, 센서가 부착되지 않은 위치에 대해서는 정확도가 매우 낮다. 무엇보다 구조물에 부착될 수 있는 센서의 개수가 매우 제한적이고, 센서가 부착되지 않는 부위에 대한 평가가 디지털 트윈 기술에서는 매우 중요한 점임을 고려할 때, 이러한 기존의 기법의 단점은 실용성이 매우 떨어지게 된다.

따라서 본 연구에서는 앞서 언급한 단점들을 극복하기 위해, 변형률과 변위의 관계를 정의하기 위한 계수 행렬(coefficient matrix)를 고유치 문제(eigenvalue problem)로부터 정의하였고, 직접시간적분법(direct time integration) (Bathe, 1996)으로부터 변위와 하중의 관계를 정의하기 위한 계수 행렬을 정의하였다. 그리고 이 두 개의 계수 행렬로부터, 변형률과 하중 사이에 직접 연관성을 갖는 계수 행렬을 도출하였다. 또한, 이 행렬을 바탕으로 D-최적 설계를 수행하여 최적 센서 위치를 선정하였다.

기존의 기법들의 약점을 극복하고자, 센서가 부착되지 않은 위치에서의 하중 추정에 대한 정확도를 높이기 위해 System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP) 기법 (Javad and

Kedar, 2018)을 응용하여, 전 영역에 대한 하중 및 변형률을 추정하기 위한 확장 행렬(full-field expansion matrix)을 정의하였다.

2장에서는 기존의 D-최적 설계 기반 하중 추정법에 대하여 간략한 개념을 설명하고, 3장에서는 본 연구에서 제안된 방법을 소개한다. 그리고 4장과 5장에서는 제안한 방법을 다양한 수치 예제에 적용하여 정확성을 검증하였고, 결론을 제시하였다.

## 2. D-optimal design 기반 하중 추정

구조물에 가해지는 하중 추정 문제는 식 (1)과 같이 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 와 하중 벡터  $F_g$ 의 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\epsilon_g = \mathbf{A} F_g \quad (1)$$

여기서 행렬  $\mathbf{A}$ 는 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 와 하중 벡터  $F_g$ 의 계수 행렬(Coefficient matrix)이다. 식 (1)로 부터 구조물의 특정 위치에서의 변형률은 계수 행렬  $\mathbf{A}$ 의 행 성분과의 하중 벡터  $F_g$ 의 곱으로 표현됨을 알 수 있다. 이는 선형 탄성 문제에 적용되며, 중첩의 원리가 성립하는 경우에만 활용할 수 있다.

식(1)에 무어-펜로즈 유사 역행렬 (Penrose, 1954)을 취하면 다음 식 (2)와 같이 하중 벡터  $F_g$ 에 대한 식으로 표현할 수 있다.

$$F_g = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \epsilon_g \quad (2)$$

구조물에 부착된 센서로부터 측정된 변형률은 오차가 발생하는데, 만약 변형률 오차가 독립적으로 고르게 분포되어있고, 각각의 표준편차가  $\sigma$ 라 가정할 경우, 하중 벡터  $F_g$ 에 대한 공분산 행렬은 식 (3)과 같이 정의할 수 있다 (Masroor and Zachary, 1991).

$$\text{var}(F_g) = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (3)$$

여기서  $\text{var}(F_g)$ 은 공분산 행렬을 의미한다.

그리고 식 (3)에서 계수 행렬  $\mathbf{A}$ 에 대한 민감도 행렬  $\mathbf{S}$ 를 다음 식 (4)와 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (4)$$

센서에서 계측된 변형률의 분산  $\sigma^2$ 에 대하여 민감도 행렬  $\mathbf{S}$ 의 대각 성분(Diagonal term) 크기를 최소화하여 하중 추정의 정밀도를 증가시킬 수 있으며, 이 과정을 d-optimality criteria라 한다 (Fedrov, 1972).

식 (4)로부터 다음 식 (5)와 같이 정보 행렬(Information matrix)  $\mathbf{M}$ 을 정의할 수 있고,

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (5)$$

D-optimal Criteria는 정보 행렬  $\mathbf{M}$ 의 Determinant를 최대화하는 방법으로 수행된다 (Mitchell, 1974). 이 과정을 위해 행을 교환하기 위한 알고리즘을 사용한다 (Galil and Keifer, 1980).

행이 추가 또는 삭제될 때 마다 정보 행렬  $\mathbf{M}$ 의 determinant

값을 업데이트하는 과정은 식 (6)과 같이 표현된다.

$$|M_+| = |M|(1[+]y^T M^{-1}y) \quad (6)$$

여기서 [+]는 계수 행렬  $A$ 에 새로운 행의 추가, [-]는 기존 행의 삭제를 의미한다.

정보 행렬  $M$ 의 determinant 값을 도출하기 위해, 새로운 행 벡터  $y^T$ 가 추가되었을 경우, 정보 행렬  $M$ 의 역행렬은 다음 식 (7)과 같이 계산한다.

$$M_+^{-1} = M^{-1}[-] \frac{(M^{-1}y)(M^{-1}y)^T}{(1[+]y^T M^{-1}y)} \quad (7)$$

행 교환 알고리즘의 반복을 통해 D-최적 설계를 얻음으로써 최소한의 오차로 하중 추정을 할 수 있는 변형 게이지가 부착되어야 하는 최적의 위치를 결정한다. 변형 게이지로부터 얻은 입력 값들을 식 (2)에 대입하여 구조물의 추정하고자 하는 위치에 가해지는 하중을 추정할 수 있다.

### 3. 최적 센서 배치 및 모델 확장 기법을 이용한 하중 추정

본 장에서는 변형률과 변위의 관계를 정의하기 위한 변형률-변위 계수 행렬과 변위와 하중의 관계를 정의하기 위한 변위-하중 계수 행렬을 정의한다. 그리고, 이 두 개의 행렬로부터, 변형률과 하중 사이에 직접 연관성을 갖는 계수 행렬을 도출한다. 또한, 센서가 부착되지 않은 위치에서의 하중 및 변형률을 추정하기 위해 System Equivalent Reduction Expansion Process(SEREP) 기법 (O'Callahan and Avitabile, 1988)을 응용하여 Full-field 확장 행렬을 도출한다.

#### 3.1 변형률-변위 계수 행렬 정의

구조물의 모드 계산을 위해 고려되는 비감쇠 자유진동 운동 방정식은 다음과 같다.

$$M_g \ddot{\mathbf{u}}_g + K_g \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (8)$$

여기서  $M_g$  과  $K_g$ 는 각각 질량 및 강성행렬을 나타내며,  $\ddot{\mathbf{u}}_g$ 와  $\mathbf{u}_g$ 는 각각 가속도 및 변위 벡터를 나타낸다.

식 (8)의 해인 변위 벡터  $\mathbf{u}_g$  와 가속도 벡터  $\ddot{\mathbf{u}}_g$ 는 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$\mathbf{u}_g(t) = \mathbf{x}_g \sin(\omega t + \theta) \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_g(t) = -\omega^2 \mathbf{x}_g \sin(\omega t + \theta) \quad (10)$$

여기서  $\mathbf{x}_g$ 는 조화 운동  $\sin(\omega t + \theta)$ 에 대한 크기 벡터 (magnitude vector)를 의미한다.

식 (9)와 식 (10)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$-\omega^2 M_g \mathbf{x}_g \sin(\omega t + \theta) + K_g \mathbf{x}_g \sin(\omega t + \theta) = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$-\omega^2 M_g \mathbf{x}_g + K_g \mathbf{x}_g = \mathbf{0} \quad (12)$$

식 (12)은 고유치 문제(eigenvalue problem)와 동일한 식이므로 다음식과 같이 재표현 할 수 있다.

$$K_g(\phi_g)_i = \lambda_i M_g(\phi_g)_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N_g \quad (13)$$

여기서,  $\lambda_i$ 와  $(\phi_g)_i$ 는 각각  $i$ 번째 고유값(eigenvalue)과 고유벡터 (eigenvector) 이고,  $N_g$ 는 고려한 모델의 총 자유도 개수이다. 일반적으로 고유벡터(eigenvector)  $(\phi_g)_i$ 를 고유 모드(eigen mode)라 표현하기도 한다.

앞서 계산된 고유 벡터(eigenvector)들을 사용하여, 다음 식 (14)와 같이 변위 벡터  $\mathbf{u}_g$ 를 정의할 수 있다.

$$\mathbf{u}_g = \Phi_g \mathbf{q}_u \text{ with } \Phi_g = [(\phi_g)_1 (\phi_g)_2 \dots (\phi_g)_{N_g}], \mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N_g} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서  $\Phi_g$ 는 고유벡터(eigenvector)  $(\phi_g)_i$ 들을 포함하는 고유 벡터 행렬(eigenvector matrix)이고,  $\mathbf{q}_u$ 는 모드 기어 계수 벡터를 나타내며, 일반좌표벡터(generalized coordinate vector)라 하기도 한다.

식 (14)로부터 주지해야 할 사실은 고유벡터(eigenvector)  $(\phi_g)_i$ 들은 변위 벡터  $\mathbf{u}_g$ 를 표현하기 위한 기저 벡터(basis vector)로 사용된다는 점이다.

식 (14)에 무어-펜로즈 유사 역행렬(moore-penrose inverse)을 사용하여 일반좌표벡터  $\mathbf{q}_u$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{q}_u = \Phi_g^* \mathbf{u}_g \text{ with } \Phi_g^* = (\Phi_g^T \Phi_g)^{-1} \Phi_g^T \quad (15)$$

위첨자 \*는 무어-펜로즈 역행렬을 의미하며, 일반적으로 무어-펜로즈 역행렬은 직사각형 행렬의 역행렬을 수행하기 위해 사용된다.

식 (14)에서 표현된 바와 유사하게 (즉,  $\mathbf{u}_g = \Phi_g \mathbf{q}_u$ ), 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 를 표현하기 위한 기저 벡터(Basis vector)가 존재하고, 그에 상응하는 기어 계수가 존재한다.

$$\epsilon_g = \Psi_g \mathbf{q}_s \text{ with}$$

$$\Psi_g = [(\psi_g)_1 (\psi_g)_2 \dots (\psi_g)_{N_g}], \mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N_g} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서,  $\Psi_g$ 는 변형률 모드 행렬(strain mode matrix)이고, 그 안에 포함되어 있는 벡터  $(\psi_g)_i$  들은 변형률 모드(stain mode)라 한다. 이 벡터들은 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 를 표현하기 위한 기저 벡터로 사용된다. 그리고  $q_s$ 는 각 변형률 응답에 기여하는 변형률 모드 기여 계수(modal participation factor) 벡터이다.

변위 모드 기여계수  $q_u$ 와 마찬가지로, 식 (16)에 변형률 모드 기여 계수  $q_s$ 는 무어-펜로즈 유사 역행렬을 적용하여 다음 식 (17)과 같이 표현할 수 있다

$$q_s = \Psi_g^* \epsilon_g \text{ with } \Psi_g^* = (\Psi_g^T \Psi_g)^{-1} \Psi_g^T \quad (17)$$

또한, 변위 모드 기여계수  $q_u$ 와 변형률 모드 기여 계수  $q_s$ 는 동일하다고 가정하면, 다음 식 (18)과 같이 표현할 수 있다.

$$q_u \simeq q_s \quad (18)$$

따라서, 식 (15), (16), (17), (18)로부터, 다음과 같이 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 와 변위 벡터  $u_g$ 에 대한 관계식을 도출할 수 있다.

$$\epsilon_g = \Psi_g (\Phi_g^T \Phi_g)^{-1} \Phi_g^T u_g \quad (19)$$

최종적으로, 식 (19)로부터, 다음과 같이 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 와 변위 벡터  $u_g$ 에 대한 관계식 (20)을 얻을 수 있다.

$$\epsilon_g = B u_g \text{ with } B = \Psi_g (\Phi_g^T \Phi_g)^{-1} \Phi_g^T \quad (20)$$

여기서 행렬  $B$ 는 일종의 계수 행렬(coefficient matrix)이며, 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 와 변위 벡터  $u_g$  사이의 관계를 정의할 수 있는 변형률-변위 관계 행렬(strain-displacement relation matrix)라 정의할 수 있다.

### 3.2 변위-하중 관계 행렬 정의

시간  $t + \Delta t$ 에서 평형 상태의 구조물의 동적 방정식은 다음 식 (21)과 같이 표현된다.

$$M_g \ddot{u}_g^{t+\Delta t} + C_g \dot{u}_g^{t+\Delta t} + K_g u_g^{t+\Delta t} = F^{t+\Delta t} \quad (21)$$

여기서,  $C_g$ 는 감쇠 행렬(Damping matrix)를 나타내고,  $F$ 는 시간 하중 벡터를 나타낸다. 이 식의 해는 직접시간적분법(direct time-integration method)을 통해 도출할 수 있으며, 본 연구에서는 Newmark- $\beta$  method (Newmark, 1959)을 적용하여 해를 도출하였다.

Newmark- $\beta$  method로부터 도출한 해인 가속도 벡터  $\ddot{u}_g$ 와 속도 벡터  $\dot{u}_g$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{u}_g^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (u_g^{t+\Delta t} - u_g^t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_g^t - \left(\frac{1-2\beta}{2\beta}\right) \ddot{u}_g^t \quad (22)$$

$$\dot{u}_g^{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (u_g^{t+\Delta t} - u_g^t) - \frac{\gamma-\beta}{\beta} \dot{u}_g^t - \Delta t \left(\frac{\gamma-2\beta}{2\beta}\right) \ddot{u}_g^t \quad (23)$$

여기서  $\beta$ 와  $\gamma$ 는 원하는 정확도와 안정성에 따라 결정될 수 있는 매개변수이다. Newmark는 인위적인 감쇠를 피하기 위해  $\gamma = 0.5$  값을 제안했다.  $\beta$ 의 값은 시간 간격  $t$ 와  $t + \Delta t$  동안 가속도가 변한다고 가정되는 방식에 따라 변하고, Trapezoidal rule (Newmark, 1959)에 의해  $\beta = 0.25$ 의 값을 사용했다.

식 (22)와 식 (23)의 가속도 벡터  $\ddot{u}_g$ 와 속도 벡터  $\dot{u}_g$ 를 식 (21)에 대입하면, 다음과 같이 관성 효과가 반영된 강성행렬과 하중 벡터의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\widehat{K}_g u_g^{t+\Delta t} = \widehat{F} \quad (24a)$$

$$\widehat{K}_g = \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C + K \right] \quad (24b)$$

$$\widehat{F} = F^{t+\Delta t} + M \left[ \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2}\right) u^t + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}^t + \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{u}^t \right] + C \left[ \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t}\right) u^t + \frac{\gamma-\beta}{\beta} \dot{u}^t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right) \ddot{u}^t \right] \quad (24c)$$

식 (24a)로 부터 다음과 같이 변위-하중 관계를 정의할 수 있다.

$$u_g^{t+\Delta t} = (\widehat{K}_g)^{-1} \widehat{F} \quad (25)$$

최종적으로, 식 (20)의 변형률-변위 관계 행렬  $B$ 와 식 (25)의 변위-하중 관계 행렬  $(\widehat{K}_g)^{-1}$ 로 부터 다음 식 (26)을 도출할 수 있으며

$$\epsilon_g = \widehat{A} \widehat{F} \text{ with } \widehat{A} = B \widehat{K}_g^{-1} \quad (26)$$

여기서 행렬  $\widehat{A}$ 가 변형률과 하중 사이에 직접 연관성을 갖는 관계 행렬이라 정의할 수 있다. 또한 행렬  $\widehat{A}$ 는 최적의 센서 위치를 결정하기 위해 다시 사용되며 다음 절에서 이를 설명한다.

### 3.3 D-optimal design 기반 최적 센서 배치

3.1장에서 계산한 행렬  $\widehat{A}$ 를 D-최적 설계를 이용하여 공분산 행렬을 최소화시켜야 한다. 이를 위해 행렬  $\widehat{A}$ 로부터 정의되는 정보 행렬  $\widehat{M}$ 을 다음과 같이 계산하고,

$$\widehat{M} = \widehat{A}^T \widehat{A} \quad (27)$$

Determinant 값이 최대화가 되는 행렬을 구축하기 위해 행 교환 과정을 반복하며 아래 식 (28)과 같이 행렬식을 반복적으로 계산한다.

$$|\widehat{\mathbf{M}}_+| = |\widehat{\mathbf{M}}|(1[+]y^T\widehat{\mathbf{M}}^{-1}y) \quad (28)$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_+^{-1} = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}[-] \frac{(\widehat{\mathbf{M}}^{-1}y)(\widehat{\mathbf{M}}^{-1}y)^T}{(1[+]y^T\widehat{\mathbf{M}}^{-1}y)} \quad (29)$$

식 (29)는 행이 추가된  $\widehat{\mathbf{A}}$  정보 행렬의 행렬식을 도출하기 위해 새로운 후보 열  $y^T$ 이 추가되었을 경우 정보 행렬의 역행렬을 도출한다.

최종적으로 2장에서와 마찬가지로 행 교환 알고리즘의 반복을 통해 D-최적 설계를 얻음으로써 최소한의 오차로 하중 추정을 할 수 있는 변형 게이지가 부착되어야 하는 최적의 위치를 결정할 수 있다. 마지막으로, 변형 게이지로부터 얻은 입력 값들을 하중 벡터와 변형률 벡터의 관계식에 대입하여 추정하고자 하는 하중 벡터를 도출할 수 있다.

### 3.4 Full-field 확장 행렬 정의

본 연구에서는 센서가 부착되지 않은 위치(non-sensor field)에서의 하중 추정을 하기 SEREP 기법을 응용하여 전 영역(full-field) 범위 및 하중 확장 행렬을 정의하였다. 확장 행렬은 소수의 센서가 부착되는 위치(sensor field)의 결과로부터 전 영역의 하중과 변형률을 추정할 수 있다.

식 (26)의 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 는 구조물에 부착된 센서 위치에서 얻어진 변형률 벡터  $\epsilon_s$ 와 센서가 부착되지 않은 위치의 변형률 벡터  $\epsilon_u$ 로 구분할 수 있으며, 이를 다음과 같이 행렬 분할(matrix partitioning) 형태로 표할 수 있다.

$$\epsilon_g = \Psi_g q \text{ with } \epsilon_g = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_u \end{bmatrix}, \Psi_g = \begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_u \end{bmatrix} \quad (30)$$

여기서  $\Psi_s$ 와  $\Psi_u$ 는 변형률 벡터  $\epsilon_s$ 와  $\epsilon_u$ 에 대응되는 변형률 모드 기어 계수이다. 중요한 점은 변형률 벡터  $\epsilon_u$ 는 센서 미부착 위치에서의 값으로, 실제로는 센서가 부착되지 않고 이론에 의해서 계산되는 변형률이다.

식 (30)로부터 센서가 부착된 위치에 대한 변형률 벡터  $\epsilon_s$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon_s = \Psi_s q \quad (31)$$

식 (31)의 양변에  $\Psi_s^T$ 를 곱하면,

$$\Psi_s^T \epsilon_s = \Psi_s^T \Psi_s q \quad (32)$$

그리고 양변에  $(\Psi_s^T \Psi_s)^{-1}$ 을 곱하면, 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$(\Psi_s^T \Psi_s)^{-1} \Psi_s^T \epsilon_s = (\Psi_s^T \Psi_s)^{-1} \Psi_s^T \Psi_s q \quad (33)$$

최종적으로, 모드 기어 계수 벡터  $q$ 에 대한 식으로 정리를 한다면 식 (34)과 같이 표현할 수 있다.

$$q = \tilde{\Psi}_s \epsilon_s \text{ with } \tilde{\Psi}_s = \Psi_s^T \Psi_s^{-1} \Psi_s^T \quad (34)$$

구조물의 전체 영역(full-field)에서의 변형률 응답(strain response)를 도출하기 위해 식 (34)을 식 (30)에 대입하면, 다음 식 (35)와 같이 센서 위치에서의 변형률 계측값을 구조물 전체 자유도의 변형률 값으로 확장하는 변형률 확장 행렬(strain expansion matrix)  $E_s$ 를 계산할 수 있다.

$$\epsilon_g = E_s \epsilon_s \text{ with } E_s = \Psi_g \Psi_s^g \quad (35)$$

변형률과 마찬가지로 하중 벡터는 다음과 같이 행렬 분할(Matrix partitioning) 할 수 있다.

$$F_g = A_g^* \epsilon_g \text{ with } A_g^* = \begin{bmatrix} A_s^* \\ A_u^* \end{bmatrix}, F_g = \begin{bmatrix} F_s \\ F_u \end{bmatrix} \quad (36)$$

하중 추정 위치 자유도에 대한 하중 벡터는 식 (37)과 같이 정리할 수 있다.

$$F_s = A_s^* \epsilon_g \quad (37)$$

마찬가지로 식 (37)도 식 (31)과 같이 미지수의 수가 방정식의 수와 같지 않으므로, 이 방정식의 경우 일반화 역행렬 방법(generalized inverse method)과 least-squares approach를 사용하여 풀어야 한다.

$$(A_s^*)^T F_s = (A_s^*)^T A_s^* \epsilon_g \quad (38)$$

식 (38)을 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$(A_s^{*T} A_s^*)^{-1} (A_s^*)^T F_s = (A_s^{*T} A_s^*)^{-1} (A_s^*)^T A_s^* \epsilon_g \quad (39)$$

식 (39)을 변형률 벡터  $\epsilon_g$ 에 관한 식으로 정리를 하면

$$\epsilon_g = (A_s^*)^T A_s^* (A_s^*)^T F_s \quad (40)$$

또한, 하중 벡터와 후보군 행렬도 변형률과 변형 모드 형상과 마찬가지로 일반화 역행렬을 사용하여 full-field force vector를 도출할 수 있는 Force expansion matrix  $E_f$ 를 식 (42)과 같이 계산할 수 있다.

$$F_g = A_g^* \epsilon_g \text{ with } A_g^* = \begin{bmatrix} A_s^* \\ A_u^* \end{bmatrix}, F_g = \begin{bmatrix} F_s \\ F_u \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{E}_f \mathbf{F}_s \text{ with } \mathbf{E}_f = \mathbf{A}_g^* \mathbf{A}_s \quad (42)$$

식 (42)에서 계산한 하중 벡터의 확장 행렬을 이용하여 통상적으로 하중이 가해지는 위치에 가해진 하중을 구조물 전체 노드 가해지는 하중으로 확장하여, 하중을 추정하고자 하는 위치를 사전에 설정하지 않고 구조물 전체 노드들에 가해지는 하중을 추정할 수 있다.

### 4. 하중 추정 평가

제안한 기법의 성능을 검증하기 위해 몇 가지 수치 예제에 적용하여 검토하였다. 수치 예제에 대한 FE 모델링, 강성 행렬 및 하중 벡터 구축 등은 상용 FE 해석 software인 ABAQUS를 이용하였다. 그리고 제안된 방법은 MATLAB 기반의 In-house 코드로 구축하여 하중 추정 평가에 사용하였다.

본 연구에서는 해석에 적용된 하중과 추정된 하중의 정확도 비교 검토를 위해, 벡터 norm을 계산하여 다음과 같이 오차율(%)을 계산하였다.

$$e_{\%rms} = \left( \frac{\sqrt{\sum (f_{app} - f_{rec})^2}}{\sqrt{\sum f_{app}^2}} \times 100 \right) \% \quad (43)$$

여기서  $f_{app}$  는 해석에서 구조물에 가해진 하중 벡터의 성분이고,  $f_{rec}$  는 제안된 하중 추정 기법을 이용하여 추정된 하중 벡터의 성분이다.

#### 4.1 Jacket structure problem

본 예제는 아래 Fig. 1과 같이 B = 37m, H = 87m, 두께 t = 0.025m인 자유도 155766개의 Jacket structure model을 Shell element로 모델링 하여 Main column 부분에 국부 종 방향 하중이 가해지는 동적 해석을 수행하였다.

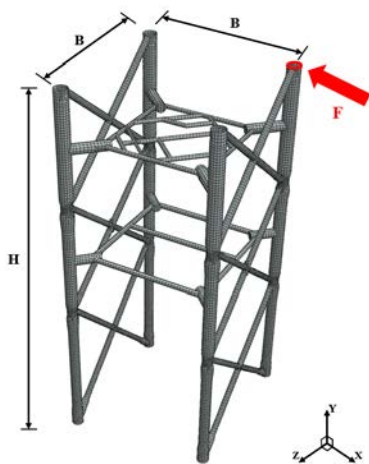


Fig. 1 The FE model of the jacket structure

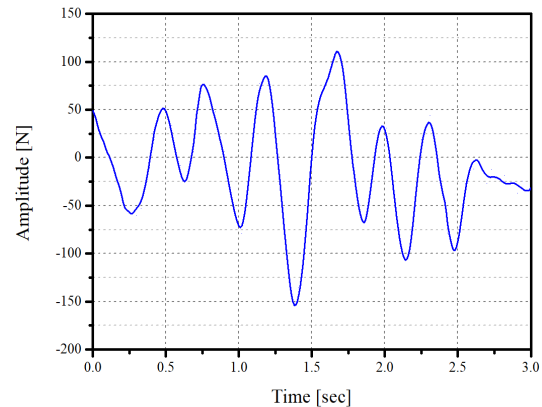


Fig. 2 Applied load profile of the jacket structure

유한요소 모델에 적용한 element type은 ABAQUS S4 shell element를 사용하였고, 재료는 탄성계수 E = 206000MPa, Poisson's Ratio = 0.3인 연철(mild steel)을 사용하였다. 구조물에 가해진 동적 하중은 3초 동안 main column 한 개의 상단 끝단에 x축 방향으로 적용하였고, 가해진 하중 amplitude에 대한 load profile은 아래 Fig. 2와 같으며 jacket structure의 main column들의 밑단의 자유도들을 all-fixed 경계 조건을 적용하여 해석을 진행하였다.

Jacket structure FE 모델에서의 D 최적 설계를 통해 얻은 최적 센서 노드 위치를 아래 Fig. 3과 같이 설정하였고, 최적 센서 위치 노드와 센서 각도 방향은 Table. 1에 명시하였다.

Fig. 4는 target node에서 D-optimal design 기반 하중 추정법과 제안한 하중 추정법을 통해 추정한 전체 하중 벡터가 실제 FE 모델에 가해진 하중과 얼마나 일치하는지에 대해 도식하였다.

Target node에서의 하중 추정 오차율은 D-optimal 기반 하중 추정법은 24.7%이었고, 제안한 하중 추정법의 오차는 7.2%로 본 연구에서 제안한 하중 추정법의 정확도가 이전 기법의 정확도보다 우수한 것을 알 수 있다.

또한, 각 기법으로 추정된 하중을 이용하여 도출한 변위들과 실제 변위와의 일치 정확도를 Fig. 5와 같이 표현하였다. 각 하중 추정법을 이용하여 도출한 변위 값에 대한 오차율은 D-optimal 기반 하중 추정법은 34.3%이었고, 제안한 하중 추정법은 9.6%의 오차율로 변위에서도 하중과 마찬가지로 제안한 방법의 정확성을 검증하였다.

Table 1 Optimal gauge node numbers and axial orientations

Node number	Axial orientations
9794	x
9685	z
5057	x
22917	y
23136	z

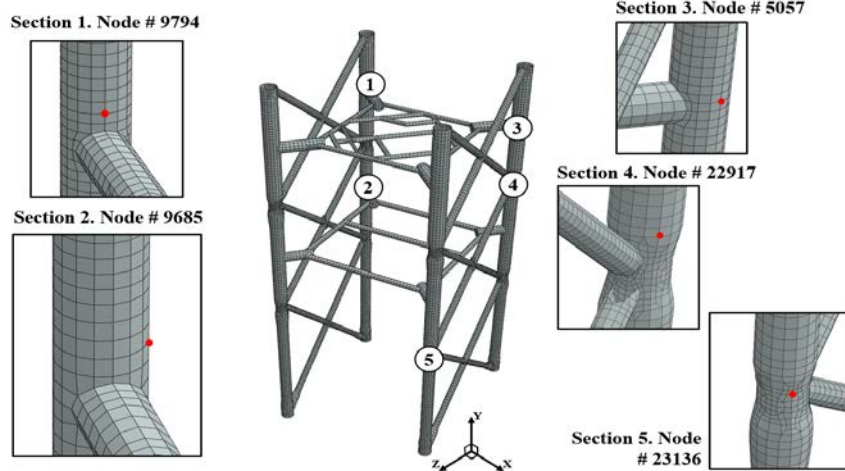


Fig. 3 Optimal gauge locations of jacket structure problem

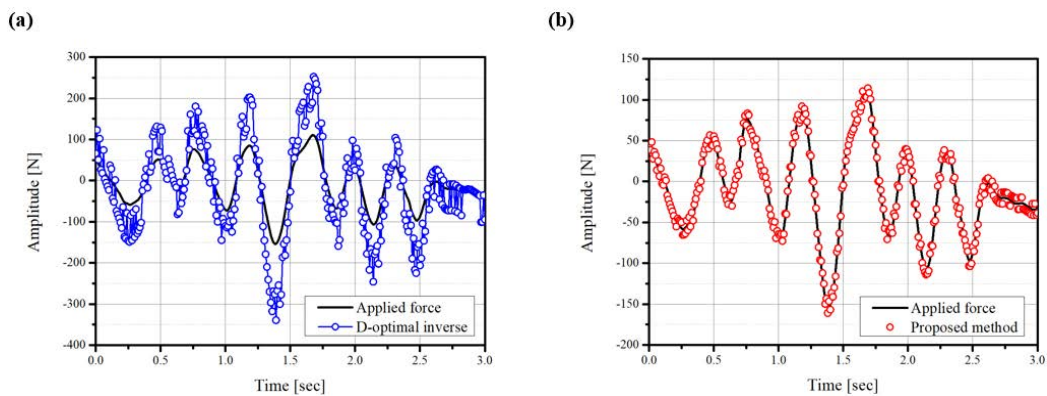


Fig. 4 Applied load recovery results on target node (a) D-optimal inverse method (b) Proposed method

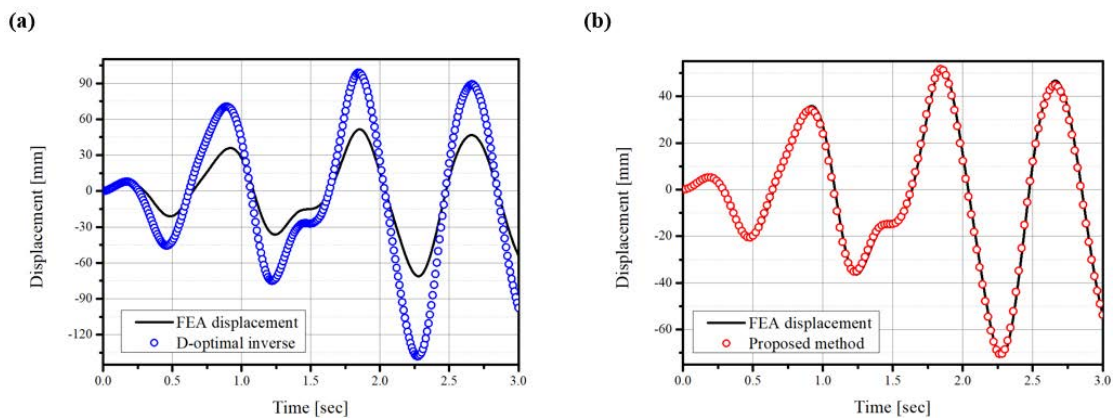


Fig. 5 Displacement recovery results on target node (a) D-optimal inverse method (b) Proposed method

### 4.2 Stiffened plate problem

본 예제는 아래 Fig. 6과 같이  $B = L = 1200\text{mm}$ ,  $w = 400\text{mm}$ ,  $l = 300\text{mm}$  두께  $t = 20\text{mm}$ 인 자유도 110058개의 stiffened plate model을 shell element로 모델링 하여 bottom plate 부분에  $y$  방향 pressure 하중이 가해지는 동적 해석을 수행하였다.

유한요소 모델에 적용한 element type은 앞선 예제와 마찬가지로

ABAQUS S4 shell element를 사용하였고, 재료는 탄성계수  $E = 206000\text{MPa}$ , Poisson's Ratio = 0.3인 연철(mild steel)을 사용하였다.

구조물에 가해진 동적 하중은 3초 동안 stiffened plate의 하부 Plate에 전체적으로  $y$ 축 방향 pressure 하중으로 적용하였고, 가해진 하중 amplitude에 대한 load profile은 아래 Fig. 7과 같으며 stiffened plate의 양 끝단 자유도들을 all-fixed 경계 조건을 적용하여 해석을 진행하였다.

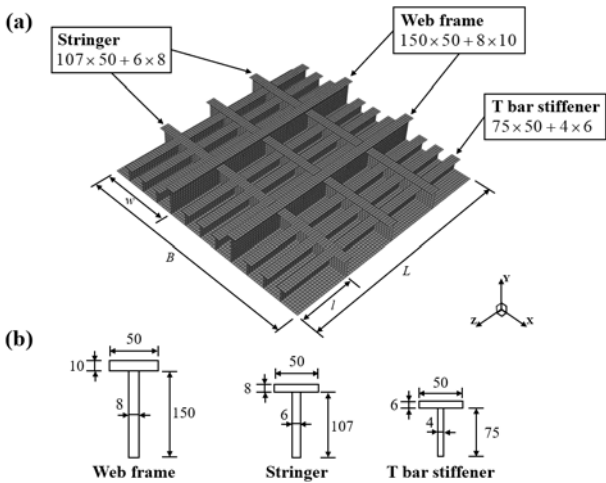


Fig. 6 The stiffened plate: (a) FE model (b) Section drawings of structural members

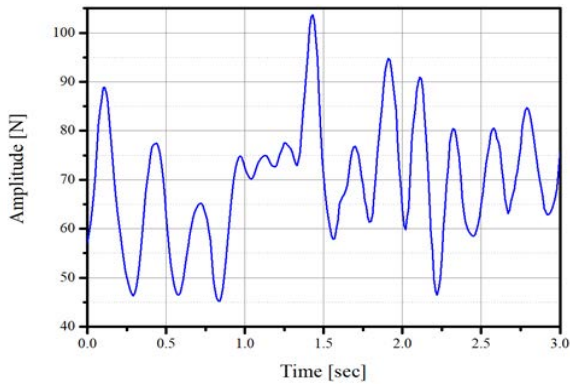


Fig. 7 Applied load profile of the stiffened plate

Stiffened plate 모델에서 진행한 D-최적 설계를 통해 얻은 최적 센서 노드 위치를 아래 Fig. 8과 같이 설정하였고, 최적 센서 위치 노드와 센서 각도 방향은 Table. 2에 명시하였다.

Table 2 Optimal gauge node numbers and axial orientations

Node number	Axial orientations
6295	y
8259	y
10931	x
16441	x
17517	y

Fig. 9는 target node에서 D-최적 설계만을 이용하여 추정된 하중 벡터와 후보군 행렬의 모델 확장 기법을 통해 추정된 하중 값이 실제 ABAQUS 소프트웨어에서 FE 모델에 가해진 하중과의 일치 정확도를 나타내었다.

Target node에서의 하중 추정 오차율은 D-optimal 기반 하중 추정법은 18.4%이었고, 제안한 하중 추정법의 오차는 5.0%로 본 연구에서 제안한 확장 기법을 이용한 하중 추정법의 정확도가 이전의 기법의 정확도보다 향상된 것을 알 수 있다.

또한, 각 기법으로 추정된 하중을 이용하여 계산한 변위들과 실제 발생한 변위와의 일치 정확도를 Fig. 10과 같이 표현하였다. 각 하중 추정법을 이용하여 역 추정된 변위 값에 대한 오차율은 D-optimal 기반 추정법은 29.1%이었고, 제안한 하중 추정법은 13.6%로 변위에서도 하중과 마찬가지로 제안한 방법의 정확성을 검증하였다.

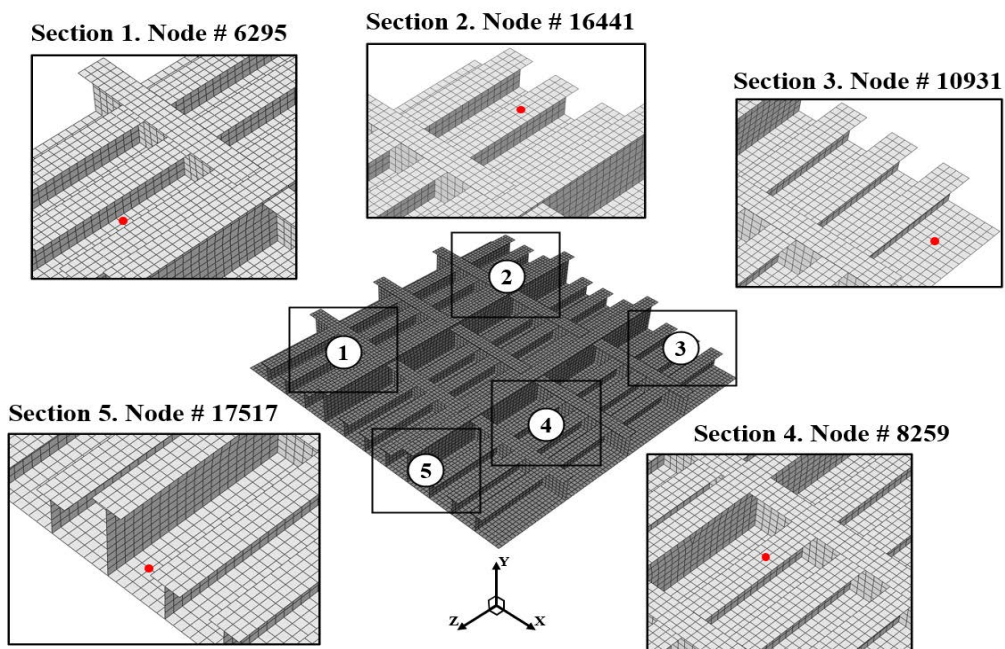


Fig. 8 Optimal gauge locations of jacket structure problem



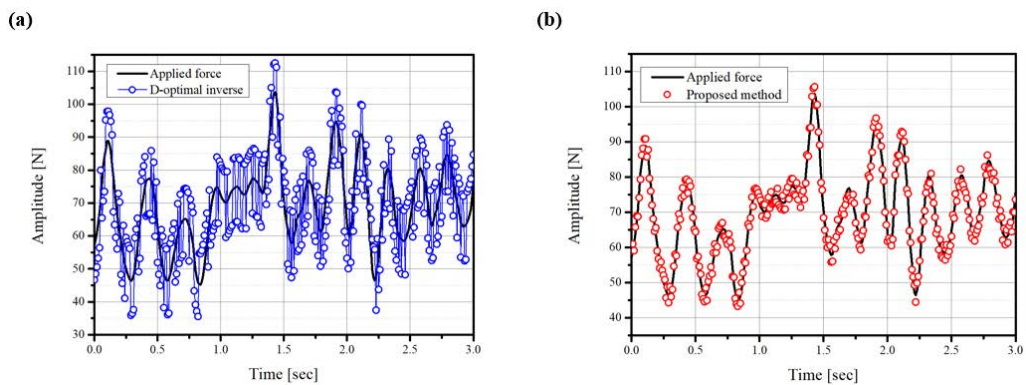


Fig. 9 Applied load recovery results on target node (a) D-optimal inverse method (b) Proposed method

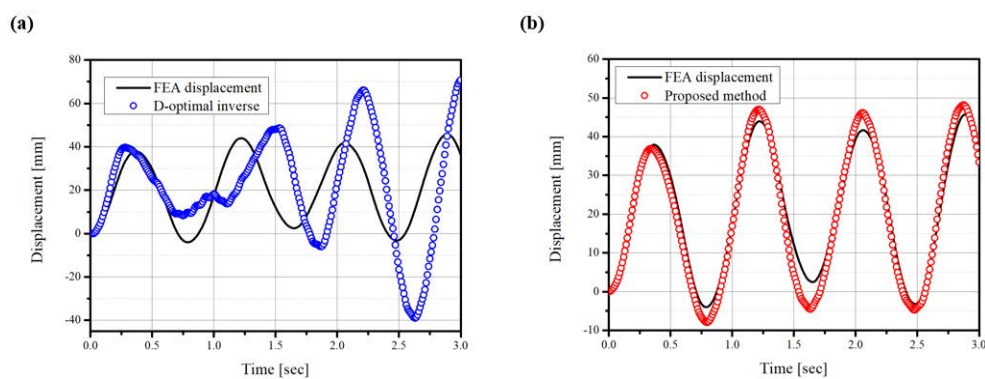


Fig. 10 Displacement recovery results on target node (a) D-optimal inverse method (b) Proposed method

## 5. 결론

본 연구에서는 D-최적 센서 배치와 모델 확장 기법을 활용하여 구조물에 가해지는 하중을 효율적으로 추정하는 기법을 제안하였다. 변형률과 변위의 관계를 정의하기 위한 계수 행렬을 고유 벡터로부터 정의하였고, 직접시간적분법으로부터 변위와 하중의 관계를 정의하기 위한 계수 행렬을 정의하였다. 그리고 이 두 개의 계수 행렬로부터, 변형률과 하중 사이에 직접 연관성을 갖는 계수 행렬을 도출하였다. 기존의 기법들의 약점을 극복하고자, 센서가 부착되지 않은 위치에서의 하중 추정에 대한 정확도를 높이기 위해, 변형률 및 하중 확장 행렬을 정의하였다.

제안된 기법의 효율성을 검증하기 위해 jacket structure FE model과 stiffened plate FE model에 각각 동적 하중을 적용하였고, target node를 임의의 위치에 설정하여 가해지는 하중과 변위를 추정하여 실제 FE 해석에 가해진 하중과 발생한 변위와 비교 검토하였다. 검토 결과, 제안한 방법은 기존 기법보다 우수한 정확도를 보여주었고, 센서가 부착되지 않은 위치에서의 변형률과 하중도 비교적 정확하게 추정하였다. 따라서, 제안한 하중 추정법을 선박 및 해양 구조물의 디지털 트윈 구현에 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

향후, 강화학습(reinforcement learning) 기반 디지털 트윈 모델 구현 기술 및 algebraic dynamic condensation (Boo and Lee, 2017), enhanced craig-bampton method (Boo and Lee,

2018)와 같은 advanced ROM 기법과의 융합을 통해, 구조물 Real-time simulation 연구로도 확장할 수 있다. 마지막으로, Genetic algorithm(GA) (Ferrero and Díez, 2020)을 적용하여 구조 하중 식별에 대한 최소 센서 개수 추정을 위한 연구로도 발전시킬 수 있을 것이라 예상된다.

## 후기

이 논문은 산업통상자원부 재원으로 한국산업기술진흥원의 지원을 받아 수행된 연구 결과임 (P0017006 스마트아드전문인력양성사업)

## References

- Arrichiello, V. and Gualeni, P., 2020. Systems Engineering and Digital Twin: A Vision for the Future of Cruise Ships Design, Production and Operations. *International Journal of Interactive Design Manufacturing*, 14, pp.115-122.
- Bathe, K.J., 1996. *Finite Element Procedures*. New York: Prentice Hall. (11).
- Boo, S.H. and Lee, P.S., 2017. A dynamic condensation method using algebraic substructuring. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(12), pp.1701-1720.

- Boo, S.H. and Lee, P.S., 2018. Towards improving the enhanced Craig-Bampton method. *Computers and Structures*, 196, pp.63-75.
- Busby, H.R. and Trujillo, D.M., 1987. Solution of an inverse dynamics problem using an eigenvalue reduction technique. *Computers & Structures*, 25(1), pp.109-117.
- Craig, R.R. and Bampton, M.C., 1968. Coupling of substructures for dynamic analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 6(7), pp.1313-1319.
- Desanghere, G., 1983. Identification of external forces based on transferfunction measurements: frequency response method. *Proceedings of the 8th International Seminar on Modal Analysis*.
- Fedorov, V.V., 1972. *Theory of optimal experiments*. Academic Press Inc. New York. 292.
- Ferrero, R. and Díez, G., 2020. Analysis of the genetic algorithm operators for the node location problem in local positioning systems. *In Proceedings of the International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems*, pp.273-283.
- Galil, Z. and Kiefer, J., 1980. Time and space-saving computer methods, related to Mitchell's DETMAX, for finding d-optimum designs. *Technometrics*, 22(3), pp.301-313.
- Gupta, D.K., 2013. *Inverse methods for load identification augmented by optimal sensor placement and model order reduction*. Department of mechanical engineering University of Wisconsin Milwaukee.
- Javad, B. and Kedar, B., 2018. *Modal expansion using strain mode shapes*. Experimental Mechanics Laboratory.
- John, O'Callahan, Peter, A, Riemer, R, 1988. System equivalent reduction expansion process. *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pp.29-37.
- Johnson, M. and Nachtsheim, C.J., 1983. Some guidelines for constructing exact d-optimal designs on convex design spaces. *Technometrics*, 25(3), pp.271-277.
- Jones, D. and Snider, C., 2020. Characterising the digital twin: A systematic literature review. *Journal of Manufacturing Science and Technology*, 29, pp.36-52.
- Masroor, S.A. and Zachary, L.W., 1991. Designing an all-purpose force transducer. *Experimental Mechanics*, 31(1), pp.33-35.
- Mitchell, T.J., 1974. An algorithm for the construction of "d-optimal" experimental designs. *Technometrics*, 16(2), pp.203-210.
- Newmark, N.M., 1959. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85, pp.67-94.
- Penrose, Z.A., 1954. Generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51.

