



고립파의 수직 벽면 반사와 Stokes 감쇠에 관한 개선된 부시네스크 방정식을 이용한 수치해석 연구

박진수¹·장택수^{2,†}

선박해양플랜트연구소 심해공학연구센터¹

부산대학교 조선해양공학과²

Numerical Study on the Reflection of a Solitary Wave by a Vertical Wall Using the Improved Boussinesq Equation with Stokes Damping

Jinsoo Park¹·Taek Soo Jang^{2,†}

Korea Research Institute of Ships & Ocean Engineering, Deep Ocean Engineering Research Center¹

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University²

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

In this paper, we simulate the collision of a solitary wave on a vertical wall in a uniform water channel and investigate the effect of damping on the amplitude attenuation. In order to take into account the damping effect, we introduce the Stokes damping whose dissipation is dependent on the velocity of wave motion on the surface of a thin layer of oil. That is, we use the improved Boussinesq equation with Stokes damping to describe the damped wave motion. Our work mainly focuses on the amplitude attenuation of a propagating solitary wave, which may depend on the Stokes damping together with the initial position and initial amplitude of the wave. We utilize the method of images and a powerful numerical tool (functional iteration method) for solving the improved Boussinesq equation, yielding an effective numerical simulation. This enables us to find the amplitudes of the incident wave and reflected one, whose ratio is a measure of the (wave) amplitude attenuation. Accordingly, we have shown that the reflection of a solitary wave by a vertical wall is dependent on not only the initial amplitude and position of a solitary but the Stokes damping.

Keywords : Improved Boussinesq equation(개선된 부시네스크 방정식), Stokes damping (Stokes 감쇠), Functional iteration method(함수 반복법), Solitary wave(고립파), Wall reflection(벽면 반사)

1. 서론

Boussinesq (1872)가 제안한 부시네스크 방정식은 대표적인 천수파의 지배방정식으로 약 비선형성임에도 대양에서 전파하는 쓰나미의 수치 모사에 여전히 활용되고 있다. 이 방정식은 이상적인 조건에서 형태를 유지하며 전파하는 고립파를 그 해로 가진다. 하지만 실제 현실에서는 어떠한 파의 전파에서도 항상 다양한 요인에 기인한 에너지의 소실로 인한 감쇠가 발생한다 (Dutykh & Dias, 2007). 실제 실험에서도 고립파의 전파는 항상 조금의 에너지 소실이 동반된다. Bona et al. (1981)은 일찍이 천수파와 같은 장파를 모델링 함에 있어 고차의 비선형 항을 고려하여 수리 모델이 복잡해지는 것보다 감쇠항을 고려함으로써 해의 물리적 타당성을 얻는 것이 이점이 더 크다고 강조

하였다. 또한 Brocchini (2013)는 부시네스크 계열 방정식의 유도과정에서 와도와 난류 영향을 고려한 감쇠 메커니즘이 쇄파대의 유동을 해석하는 데에 더 우수한 성능을 보일 수 있음을 밝혔다. Wu and Hsiao (2018)도 수조에서 고립파가 먼 거리를 전파하면 바닥의 영향으로 인한 점성 및 마찰 효과로 인해 필연적으로 파의 감쇠가 발생함을 주장하였다. 그리고 수로를 전파하는 고립파의 진폭 감쇠에 관한 이론적 연구도 수행된 바 있다 (Keulegan, 1948; Mei, 1983).

이러한 배경으로 부시네스크 방정식에 감쇠항을 고려한 다양한 연구가 수행되었다. Zelt (1991)는 연성된 부시네스크 방정식의 운동량 보존 방정식에 바닥 마찰에 의한 감쇠항과 쇄파로 인해 발생한 난류에 기인한 감쇠항을 더하여 일정 경사각 바닥면의 수로에서의 파의 오름을 연구하였다. Liu and Orfila (2004)

와 Dutykh (2009)는 바닥면 경계조건에 난류 경계층에서의 마찰에 기인하는 감쇠항을 고려한 유속 평균(depth-averaged) 부시네스크 방정식을 제안하였다. Arévalo et al. (2002), Dutykh and Dias (2007)과 Wang and Xu (2013)은 동적 자유수면 경계조건에 외부 요인으로 인한 에너지 소실에 기인한 Stokes 감쇠항과 점성에 의한 내부 에너지 소실에 기인한 유체역학적 감쇠항을 각각 고려한 부시네스크 방정식을 연구하였다. 그리고 Lee et al. (2007)은 바닥 마찰에 의한 에너지 감쇠항을 고려한 2층 부시네스크 방정식의 연구를 수행하였다. 최근, Park (2020)은 Stokes 감쇠와 유체역학적 감쇠를 동시에 고려한 단일 감쇠 부시네스크 방정식을 함수반복법 (Jang, 2017; Jang, 2018)에 적용하였다. 이 함수반복법은 비선형 부시네스크 방정식을 풀기 위한 준해석적 해법으로써, 섭동법과 같이 작은 섭동 매개변수에 의존하지 않으며, 가정을 통해 문제를 선형화할 필요도 없어 다양한 강 비선형 문제로의 응용이 쉽다.

한편, 본 연구의 주제인 고립파의 감쇠에 관한 연구는 부시네스크 방정식의 조파 메커니즘을 더 완전하게 할 수 있다. 수행한 조사의 범위 내에서 판단해 보는데, 고립파의 벽면 반사와 감쇠항의 관계에 관한 심층 연구는 발견할 수 없었다. 따라서 본 연구에서는 외부 마찰에 기인한 Stokes 감쇠를 고려한 개선된 부시네스크 방정식을 이용하여 수치해석을 통해, 고립파가 수직 벽면에 충돌하고 그 반사파가 다시 제자리로 돌아왔을 때의 파 진폭의 감쇠율에 영향을 미치는 요인에 대해 살펴본다. 여기서, 수치해석을 위해 함수반복법을 사용한다.

본 논문은 2장에서 감쇠 부시네스크 방정식과 그 해법으로써 함수반복법을 이용한 해에 관해 간략하게 설명한다. 3장에서는 수치해석과 그 결과에 대한 설명을 제시하며 4장에서는 본 연구의 핵심적인 결과를 요약한다.

2. 해법

2.1 지배방정식

Stokes 감쇠항을 고려한 무차원의 개선된 부시네스크 방정식은 아래와 같다 (Wang & Xu, 2013; Wang et al., 2013; Lu et al., 2016).

$$\eta'_{t't'} - \eta'_{x'x'} - \eta'_{x'x't't'} = (\eta'^2)_{x'x'} - \nu_S \cdot \eta'_{t'}, \quad (1)$$

여기서, $\eta'(x', t')$ 는 무차원 파고 함수, 아래 첨자 x' 과 t' 은 각각 공간 및 시간 편미분, ν_S 는 무차원 Stokes 감쇠 계수이다. 이때, Stokes 감쇠는 자유수면 상의 에너지 소실에 의한 감쇠이다. 예를 들어, 자유수면 상에 얇은 유막이 있으면 자유수면 상에서의 점성 응력이 자유수면 내에서의 응력보다 커지면 그 차이로 인해 소실이 발생하는데 (Debnath, 1994), 이를 물리적으로 고려하기 위해 감쇠가 파의 속도에 비례하는 Stokes 감쇠항 (Arévalo et al., 2002; Wang & Xu, 2013)을 본 연구에 이용한다.

이제 무차원 지배방정식 (1)을 물리 차원의 식으로 변환하기 위한 무차원-물리 차원 관계식은 아래와 같다.

$$\eta' \equiv \frac{3\eta}{2h_0}, \quad t' \equiv t\sqrt{\frac{3g}{h_0}}, \quad x' \equiv x\frac{\sqrt{3}}{h_0} \quad (2)$$

여기서, h_0 는 수심(m), g 는 중력가속도(9.80665m/s²)이다. 이에 따라 식 (1)을 물리 차원의 식으로 변환한다 (Park, 2020).

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{h_0^2}{3} \eta_{xxtt} = \frac{3g}{2} (\eta^2)_{xx} - \delta_S \cdot \eta_t \quad (3)$$

여기서, c_0 는 특성속도(= $\sqrt{gh_0}$), δ_S 는 물리 차원의 Stokes 감쇠 계수(= $\nu_S \sqrt{3g/h_0}$)이다. 이때, $\delta_S=0$ 인 경우, 비감쇠의 개선된 부시네스크 방정식과 동일하다 (El-Zoheiry, 2002; Lin et al., 2009; Zhang & Lu, 2012; Wang et al., 2014; Jang, 2017). 그리고 초기 조건은 다음과 같다.

$$\eta_1(x) = \eta(x, 0), \quad \eta_2(x) = \eta_t(x, 0) \quad (4)$$

또한 경계조건으로 수직 벽면에서는 반사 조건, 벽면에서 먼 부분은 무한 원방 조건을 사용한다.

2.2 함수반복법

함수반복법(Jang, 2017; Jang, 2018)을 적용하기 위해 미분 방정식 (3)을 등가의 적분방정식으로 변환한다. 우선, 식 (3)의 양변에 가상 파라미터(pseudo-parameter) β (rad/s²)를 포함하는 가상 항(pseudo term) $\beta \cdot \eta$ 를 더하면 다음과 같다.

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{h_0^2}{3} \eta_{xxtt} + \beta \cdot \eta = \Phi(x, t) \quad (5)$$

여기서, 우변의 외력항 $\Phi(x, t)$ 는 다음과 같다:

$$\Phi(x, t) = 3g(\eta_x^2 + \eta \cdot \eta_{xx}) - \delta_S \cdot \eta_t + \beta \cdot \eta \quad (6)$$

이제 식 (5)는 다음과 같이 등가의 적분방정식 형태로 변환할 수 있다 (Jang, 2017; Jang, 2018).

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G^{(j)}(x, t, \xi, k) \cdot \eta_j(\xi) d\xi dk + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G^{(3)}(x, t, \xi, k, \tau) \cdot \Phi(\xi, \tau) d\xi dk d\tau \quad (7)$$

여기서, 커널(kernel) 함수 $G^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ 은 다음과 같다:

$$G^{(1)}(x, t, \xi, k) \equiv \frac{2}{\pi} \cos \omega_B t \cdot \cos kx \cdot \cos k\xi \quad (8)$$

$$G^{(2)}(x, t, \xi, k) \equiv \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B} \cdot \cos kx \cdot \cos k\xi \quad (9)$$

$$G^{(3)}(x,t,\xi,k,\tau) \equiv \frac{2}{\pi} \frac{\omega_B \sin[\omega_B(t-\tau)]}{c_0^2 k^2 + \beta} \cdot \cos kx \cdot \cos k\xi \quad (10)$$

여기서, 파 주파수 $\omega_B(k)$ 는 다음과 같다:

$$\omega_B(k) = \sqrt{\frac{c_0^2 k^2 + \beta}{1 + h_0^2 k^2 / 3}} \quad (11)$$

이제 함수반복법을 구성하기에 앞서 새로운 변수 X_j , $j = 1, 2, 3, 4$ 와 벡터변수 \mathbf{X} 를 정의한다.

$$\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, X_3, X_4) = (\eta, \eta_t, \eta_x, \eta_{xx}) \quad (12)$$

이에 따라 식 (7)을 포함하는 총 4개의 연성된 적분방정식을 구성할 수 있다 (Jang, 2017; Jang, 2018).

$$X_1(x,t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G^{(j)}(x,t,\xi,k) \cdot \eta_j(\xi) d\xi dk + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G^{(3)}(x,t,\xi,k,\tau) \cdot \Phi[\mathbf{X}(\xi,\tau)] d\xi dk d\tau \quad (13)$$

$$X_2(x,t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G_t^{(j)}(x,t,\xi,k) \cdot \eta_j(\xi) d\xi dk + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G_t^{(3)}(x,t,\xi,k,\tau) \cdot \Phi[\mathbf{X}(\xi,\tau)] d\xi dk d\tau \quad (14)$$

$$X_3(x,t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G_x^{(j)}(x,t,\xi,k) \cdot \eta_j(\xi) d\xi dk + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G_x^{(3)}(x,t,\xi,k,\tau) \cdot \Phi[\mathbf{X}(\xi,\tau)] d\xi dk d\tau \quad (15)$$

$$X_4(x,t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G_{xx}^{(j)}(x,t,\xi,k) \cdot \eta_j(\xi) d\xi dk + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty G_{xx}^{(3)}(x,t,\xi,k,\tau) \cdot \Phi[\mathbf{X}(\xi,\tau)] d\xi dk d\tau \quad (16)$$

여기서, 식 (6)의 Φ 는 식 (12)의 정의에 따라 다음과 같다:

$$\Phi = 3g(X_3^2 + X_1 \cdot X_4) - \delta_s \cdot X_2 + \beta \cdot X_1 \quad (17)$$

이때, 함수반복법은 비선형 편미분 방정식 (3)의 미분항을 약정 식화(weak formulation) 혹은 선형화하지 않고 그대로 사용한다. 식 (14)-(16)의 커널 함수 G_t , G_x , G_{xx} 는 각각 식 (8)-(10)을 편미분하여 얻는다.

식 (13)-(16)을 좀 더 체계적으로 나타내기 위해 적분연산자 D_i , $i=1,2,3,4$ 와 초기 조건 $\boldsymbol{\eta}_0 \equiv (\eta_1, \eta_2)$ 를 정의하여 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\equiv \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X}) \\ &= [D_1(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X}), D_2(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X}), D_3(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X}), D_4(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X})]^T \end{aligned} \quad (18)$$

Jang (2017)은 식 (18)로부터 함수반복법을 제안하였다.

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X}^{n-1}) \quad (19)$$

여기서, $n = 1, 2, \dots$ 은 반복 횟수를 의미하며, 반복 초기치는 $\mathbf{X}^0 \equiv \mathbf{0}$ 이다.

또한 Jang (2018)은 두 번째 가상 파라미터 $\lambda (> 0)$ 를 도입하여, 아래와 같이 식 (19)의 수렴성을 개선한 함수반복법을 제안하였다.

$$\mathbf{X}^n = (1 - \lambda) \cdot \mathbf{X}^{n-1} + \lambda \cdot \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{X}^{n-1}) \quad (20)$$

Park (2020)은 해의 빠른 수렴을 위해 식 (20)의 가상 파라미터 λ 를 반복해 X_1^n 의 오차에 따라 가변적으로 사용하였다. 오차는 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon(n) \equiv \|\mathbf{X}_1^n - \mathbf{X}_1^{n-1}\|_2 / \|\mathbf{X}_1^n\|_2 \quad (21)$$

여기서, $\|\cdot\|_2$ 는 유클리드 노름(Euclid norm)이다. 본 연구에서도 가변 가상 파라미터 λ_{var} 를 설정하여 수치해석에 사용한다 (Fig. 2a).

$$\lambda_{var} \equiv \begin{cases} 0.3, & \text{if } 10^{-2} \leq \epsilon(n) \\ 0.5, & \text{if } 10^{-3} \leq \epsilon(n) < 10^{-2} \\ 0.8, & \text{if } 10^{-4} \leq \epsilon(n) < 10^{-3} \\ 1.0, & \text{if } \epsilon(n) < 10^{-4} \end{cases} \quad (22)$$

그리고 본 연구에서는 허용오차를 $\epsilon_{tol} = 10^{-6}$ 으로 설정하고 반복법의 종료 기준(stopping rule)을 만족하는 반복 횟수 n 에서의 해를 수렴 해로 사용한다.

$$\epsilon(n) < \epsilon_{tol} \quad (23)$$

3. 수치해석

3.1 수치해석 변수

Fig. 1은 본 연구의 개략도를 나타낸다. 수심이 h_0 로 일정한 수로에서 초기 위치 $x = x_0$ 에 초기 진폭이 a_0 인 고립파가 출발하여 $x = 0$ 에 있는 수직 벽면에 충돌한 후 $x = x_0$ 으로 되돌아온 반사파의 진폭을 a_T 라 한다. ν_s 는 식 (1)에서 정의된 무차원 Stokes 감쇠 계수, 측정된 반사파의 진폭 a_T 와 주어진 초기 진폭 a_0 의 비를 a_T/a_0 라 하면, 반사파의 진폭 감쇠율(amplitude attenuation ratio) r 을 다음과 같이 정의한다.

$$r \equiv 1 - \frac{a_T}{a_0} \quad (24)$$

본 연구에서는 무차원 Stokes 감쇠 계수 ν_s 에 따라 초기 진폭 a_T/h_0 와 초기 위치 x_0/h_0 를 변화하면서 진폭 감쇠율 r 에 대한 영향을 조사한다.

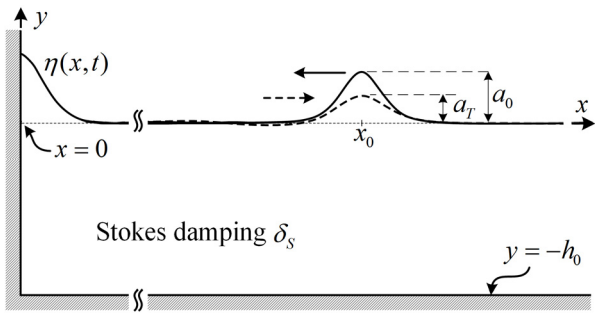


Fig. 1 Definition sketch

Table 1 Numerical values of the principal variables

| No. | a_T/h_0 | x_0/h_0 | ν_S | a_T/a_0 | r |
|-----|-----------|-----------|-------------|-----------|--------|
| 1 | 0.1 | 20 | 10^{-4} | 0.9947 | 0.0053 |
| 2 | 0.2 | 20 | 10^{-4} | 0.9945 | 0.0055 |
| 3 | 0.3 | 20 | 10^{-4} | 0.9963 | 0.0037 |
| 4 | 0.1 | 30 | 10^{-4} | 0.9934 | 0.0066 |
| 5 | 0.2 | 30 | 10^{-4} | 0.9947 | 0.0053 |
| 6 | 0.3 | 30 | 10^{-4} | 0.9974 | 0.0026 |
| 7 | 0.1 | 40 | 10^{-4} | 0.9916 | 0.0084 |
| 8 | 0.2 | 40 | 10^{-4} | 0.9939 | 0.0061 |
| 9 | 0.1 | 20 | $10^{-3.5}$ | 0.9889 | 0.0111 |
| 10 | 0.2 | 20 | $10^{-3.5}$ | 0.9887 | 0.0113 |
| 11 | 0.1 | 40 | $10^{-3.5}$ | 0.9777 | 0.0223 |
| 12 | 0.2 | 40 | $10^{-3.5}$ | 0.9802 | 0.0198 |
| 13 | 0.1 | 20 | 10^{-3} | 0.9706 | 0.0294 |
| 14 | 0.2 | 20 | 10^{-3} | 0.9703 | 0.0297 |
| 15 | 0.1 | 40 | 10^{-3} | 0.9350 | 0.0650 |
| 16 | 0.2 | 40 | 10^{-3} | 0.9383 | 0.0617 |
| 17 | 0.1 | 20 | $10^{-2.5}$ | 0.9156 | 0.0844 |
| 18 | 0.2 | 20 | $10^{-2.5}$ | 0.9146 | 0.0854 |
| 19 | 0.1 | 40 | $10^{-2.5}$ | 0.8125 | 0.1875 |
| 20 | 0.2 | 40 | $10^{-2.5}$ | 0.8167 | 0.1833 |
| 21 | 0.1 | 20 | 10^{-2} | 0.7648 | 0.2352 |
| 22 | 0.2 | 20 | 10^{-2} | 0.7603 | 0.2397 |
| 23 | 0.3 | 20 | 10^{-2} | 0.7649 | 0.2351 |
| 24 | 0.1 | 30 | 10^{-2} | 0.6465 | 0.3535 |
| 25 | 0.2 | 30 | 10^{-2} | 0.6420 | 0.3580 |
| 26 | 0.3 | 30 | 10^{-2} | 0.6494 | 0.3506 |
| 27 | 0.1 | 40 | 10^{-2} | 0.5262 | 0.4738 |
| 28 | 0.2 | 40 | 10^{-2} | 0.5272 | 0.4728 |

3.2 수치해석

수치해석에 사용한 고립파 초기 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= a_0 \operatorname{sech}^2[K(x-x_0)] \\ \eta_2(x) &= -2ca_0K \operatorname{sech}^2[K(x-x_0)] \cdot \tanh[K(x-x_0)] \end{aligned} \quad (25)$$

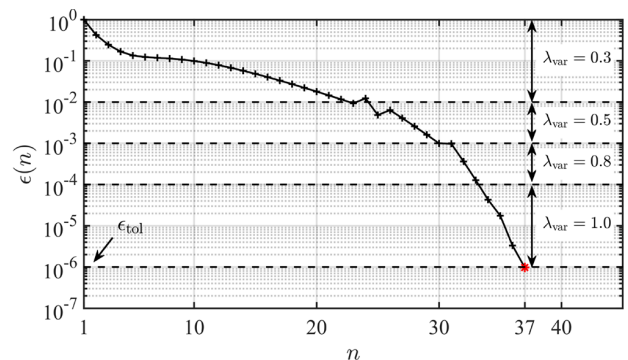
여기서, 계수 K 와 파속 c 는 다음과 같다:

$$K = \sqrt{\frac{3a_0}{4h_0^2(h_0+a_0)}} \quad (26)$$

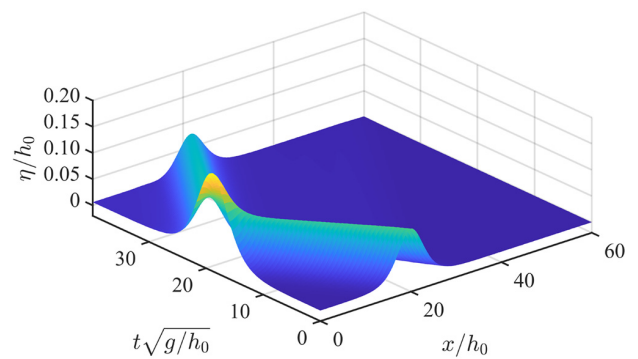
$$c = \sqrt{g(h_0+a_0)} \quad (27)$$

본 연구에서 모든 수치해석의 공간 계산 영역은 $0 \leq x \leq 30$ m, 격자 간격은 $\Delta x = 0.1$ m, 수심은 $h_0 = 0.5$ m로 일정하다. 반면에 시간 계산 영역은 고립파의 초기 위치 x_0 에 따라 달리하여 사용한다. 즉, $x_0 = 10$ m일 때, $0 \leq t \leq 9$ s, $x_0 = 15$ m일 때, $0 \leq t \leq 13.5$ s, $x_0 = 20$ m일 때, $0 \leq t \leq 18$ s이며 격자 간격은 $\Delta t = 0.1$ s로 일정하다. 그리고 가상 파라미터 β 는 Jang (2017)의 연구에서 낮은 오차의 반복해를 도출하는 범위가 $0.1 \text{ rad/s}^2 \leq \beta \leq 1.0 \text{ rad/s}^2$ 임을 참고하여 0.2 rad/s^2 로 설정하고, 식 (22)의 가변 가상 파라미터를 사용한다. 그리고 모든 수치해석 결과는 수조 시험에서 역학적 상사 관계를 성립하기 위해 일반적으로 사용하는 무차원 관계 (Madsen, 1970; Kim & Oh, 2021), 즉, 파고는 η/h_0 , 공간은 x/h_0 , 시간은 $t\sqrt{gh_0}$ 으로 나타낸다.

Table 1은 무차원의 수치해석 변수인 초기 진폭 a_0/h_0 , 초기 위치 x_0/h_0 및 Stokes 감쇠 계수 ν_S 에 따라 수행한 몇 가지 수치 해석 결과로부터 측정한 진폭 감쇠비 a_T/a_0 와 진폭 감쇠율 r 을 나타낸다.



(a) Error and the stopping rule



(b) Numerical solution: n=37

Fig. 2 Functional iteration solution: Table 1, No. 21

Fig. 2(a)는 Table 1, No. 21의 수치해석 결과이며, 반복 횟수 n 에 따른 식 (21)의 오차 $\varepsilon(n)$ 과 식 (23)의 종료 기준을 나타낸다. 특히, Fig. 2(a)에서 오차에 따라 λ_{var} 이 커질수록 수렴 속도가 빨라짐을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 2(b)는 종료 기준을 만족하는 $n=37$ 에서의 수치해를 나타낸다.

이제, 함수반복법을 부시네스크 방정식의 해법에 적용하여 얻은 수치해의 타당성을 확인하기 위해 Wang et al. (2013)이 제안한 2차 유한체적요소법(quadratic finite volume element method, qFVEM)을 도입한다. Wang et al. (2013)은 시간 미분항에 3차 three-stage 법을 사용하나, 본 연구는 일반적인 4차 Runge-Kutta 법을 사용한다.

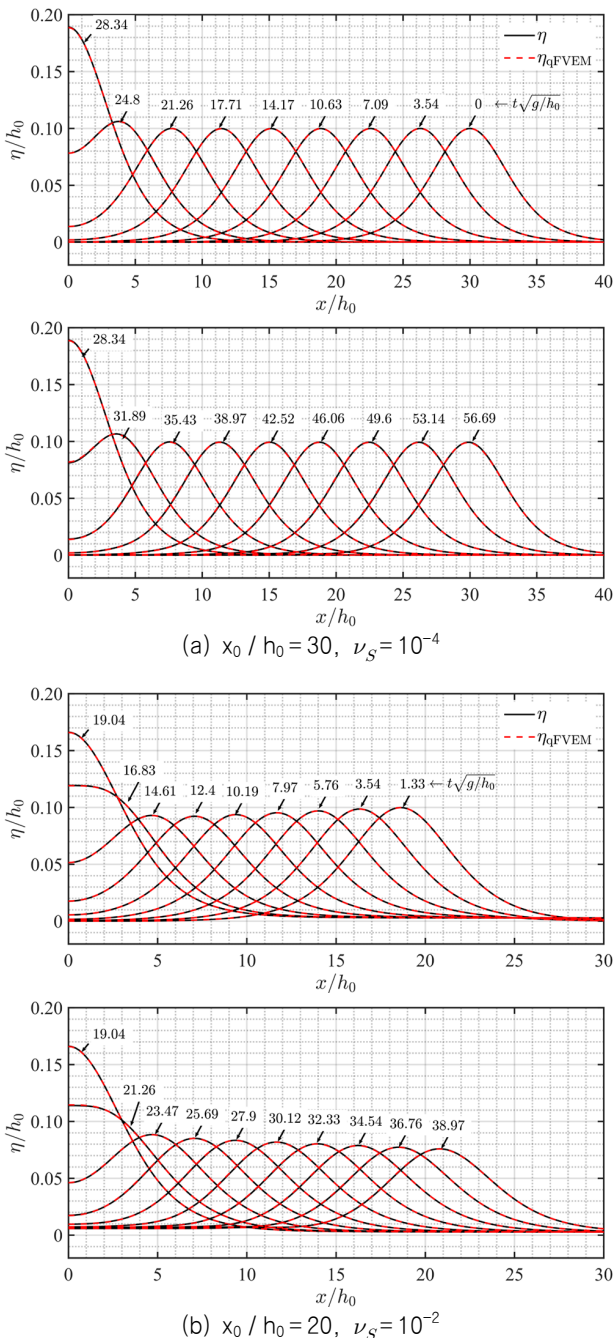


Fig. 3 Comparison of the wave profiles: η vs. η_{qFVEM}

Fig. 3(a)는 Table 1, No. 4의 함수반복법의 해 η 와 2차 유한체적요소법의 해 η_{qFVEM} 을 수직 벽면 충돌 전후의 시간별 파형으로 서로 비교하여 나타낸 것이다. 이때, η 의 경우, 종료 기준식 (23)을 만족하는 반복 횟수는 $n=52$ 이다. 또한, Fig. 3(b)는 Table 1, No. 21의 수치해 η 와 η_{qFVEM} 을 시간 파형별로 비교한다. Fig. 3의 시간별 파형 비교를 통해 두 해법의 결과가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 3의 두 가지 수치해의 오차를 비교하기 위해 다음을 정의한다.

$$error \equiv \|\eta_{qFVEM} - \eta\|_2 / \|\eta_{qFVEM}\|_2 \quad (28)$$

Fig. 4는 Fig. 3의 η 와 η_{qFVEM} 의 각 시간별($\Delta t=0.1$ s) 오차를 공간영역 $0 \leq x/h_0 \leq 40$ 에서 계산하여 나타낸 것이다. 그 결과 최대 오차는 0.006 이하로 비교적 잘 일치하므로 함수반복법이 타당함을 확인할 수 있다.

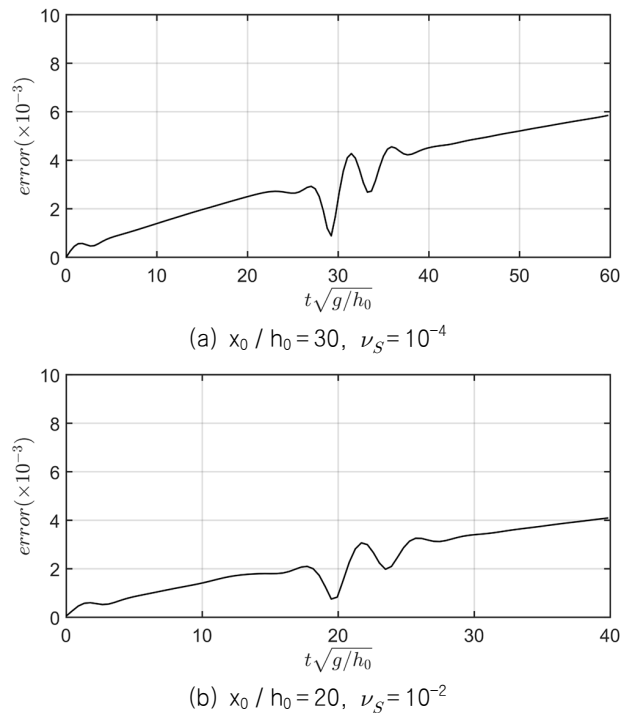
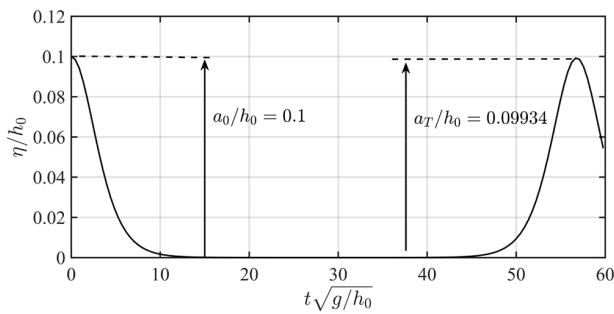
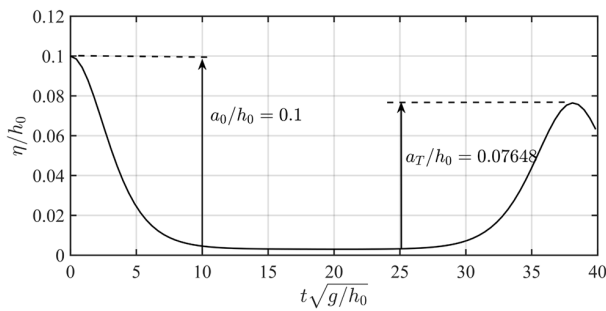


Fig. 4 Error of Fig. 3: $a_0/h_0=0.1$

Fig. 5는 각각 Table 1의 No. 4와 No. 21의 수치해석 결과로부터 초기 위치 $x_0/h_0=20, 30$ 에서 측정된 초기 진폭비 a_0/h_0 와 반사파의 진폭비 a_r/h_0 를 나타낸다. Fig. 5(a)의 경우, Fig. 5(b)보다 수직 벽면에서 먼 초기 위치에서 출발하여 초기 위치로 다시 돌아오기까지 더 먼 거리를 전파하였음에도 작은 감쇠 ν_s 를 사용하였으므로 진폭의 감쇠율이 $r=0.0066$ ($=1-a_r/a_0$)로 작다. 후자의 경우, 가까운 초기 위치에서 출발하여 전파 거리가 짧음에도 불구하고 큰 Stokes 감쇠로 인해 진폭의 감쇠율이 오히려 $r=0.2352$ 로 더 크다. 이처럼 Stokes 감쇠의 크기에 따라 반사파의 진폭 감쇠율에 지배적인 영향을 주는 변수가 달라질 수 있음을 알 수 있다.

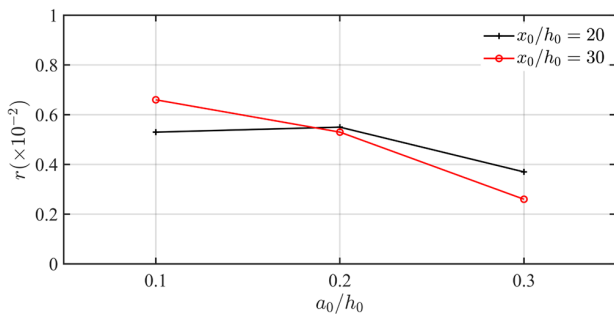


(a) $x_0 / h_0 = 30, \nu_S = 10^{-4}$

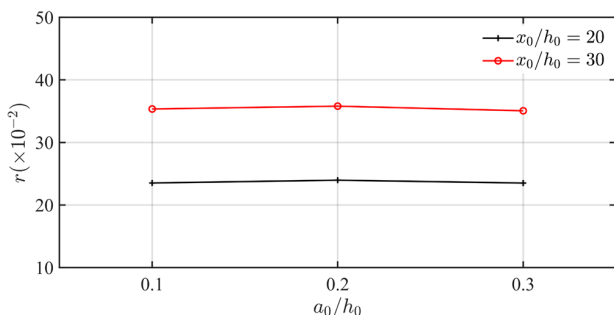


(b) $x_0 / h_0 = 20, \nu_S = 10^{-2}$

Fig. 5 Measuring the amplitude of the reflective wave: $a_0 / h_0 = 0.1$



(a) $\nu_S = 10^{-4}$

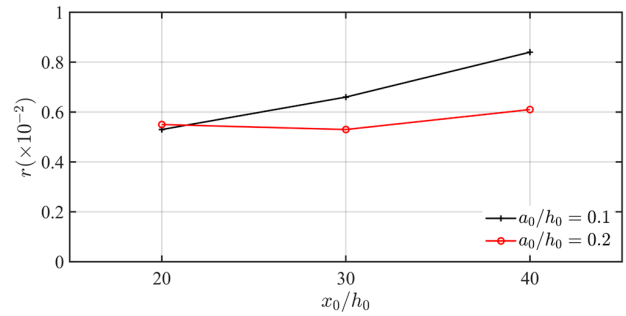


(b) $\nu_S = 10^{-2}$

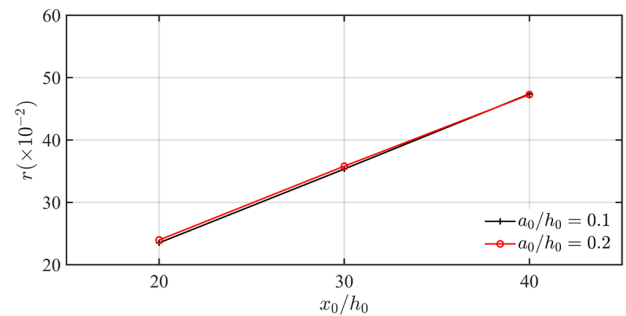
Fig. 6 Amplitude attenuation ratio r dependent on the initial amplitude a_0 / h_0

Fig. 6은 Table 1의 No. 1-6과 No. 21-26의 수치해석 결과로서 각각 Stokes 감쇠 계수를 고정한 후 ($\nu_S = 10^{-4}, 10^{-2}$), 초기 위치 ($x_0 / h_0 = 20, 30$)와 초기 진폭($a_0 / h_0 = 0.1, 0.2, 0.3$)에 따른 진폭 감쇠율 r 을 나타낸다. 작은 Stokes 감쇠 계수를 사용한 Fig. 6(a)는 초기 진폭이 클수록 진폭 감쇠율이 감소하

는 경향을 보이며, 초기 위치에 대해서는 뚜렷한 차이를 보이지 않는다. 일반적으로 작은 진폭의 고립파는 그 폭이 크므로 파와 벽면의 상호작용이 좀 더 긴 시간 동안 일어난다 (Cooker et al., 1997). 이에 따라 Fig. 6(a)와 같이 초기 진폭이 작을수록 파의 벽면에서의 상주시간(residence time)이 길어져 반사파의 감쇠율이 더 큰 것이다. 반면에 Stokes 감쇠 계수가 큰 Fig. 6(b)의 경우, 파의 감쇠율이 초기 진폭보다 주로 초기 위치에 지배적인 영향을 받음을 알 수 있다.



(a) $\nu_S = 10^{-4}$



(b) $\nu_S = 10^{-2}$

Fig. 7 Amplitude attenuation ratio r dependent on initial position x_0 / h_0

Fig. 7(a)는 Table 1의 No. 1, 4, 7과 No. 2, 5, 8의 작은 Stokes 감쇠 계수일 때 수치해석 결과이다. 이 경우, 벽면에서 초기 위치일수록 파의 감쇠율이 크며, Fig. 6(a)와 같이 초기 진폭이 클수록 반사파의 감쇠가 작다. 그리고 Fig. 7(b)는 Stokes 감쇠 계수가 큰 Table 1의 No. 21, 24, 27과 No. 22, 25, 28을 나타내며, 큰 감쇠 계수일 때는 초기 진폭에 비해 초기 위치가 감쇠율에 지배적 영향을 미침을 알 수 있다.

Fig. 8은 각각 초기 위치를 $x_0 / h_0 = 20, 40$ 으로 고정하고 초기 진폭에 따른 Stokes 감쇠의 영향을 나타낸다. Fig. 8(a)는 Table 1의 No. 1, 9, 13, 17, 21와 No. 2, 10, 14, 18, 22를 Fig. 8(b)는 No. 7, 11, 15, 19, 27과 No. 8, 12, 16, 20, 28을 각각 나타낸다. 각각의 결과로부터 $\nu_S = 10^{-4}$ 일 때, 감쇠율이 0.0084 이하로 작으며, $\nu_S = 10^{-3}$ 인 경우, 초기 위치 $x_0 / h_0 = 20$ 에서 감쇠율이 약 0.03, $x_0 / h_0 = 40$ 에서 약 0.06이다. 그리고 $\nu_S = 10^{-2}$ 일 때, $x_0 / h_0 = 20$ 에서 감쇠율이 약 0.24, $x_0 / h_0 = 40$ 에서 약 0.47이다. 따라서 같은 초기 위치에서는 초기 진폭보다 Stokes 감쇠가 반사파의 감쇠율에 지배적인 영향을 미쳤다.

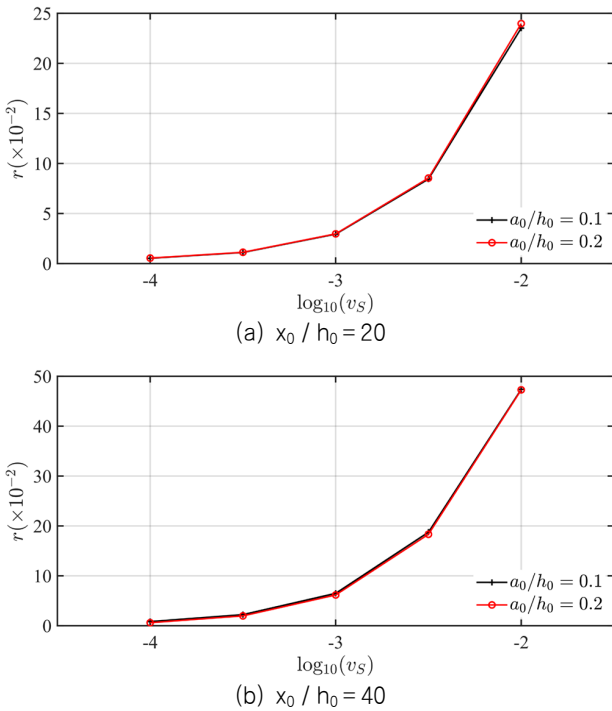


Fig. 8 Amplitude attenuation ratio r dependent on the Stokes damping coefficient v_S

4. 결론

본 연구에서는 개선된 부시네스크 방정식에 Stokes 감쇠를 고려하여 고립파의 수직 벽 충돌 후 반사파의 진폭 감쇠율에 관한 연구를 수행하였다. 이를 위해, Stokes 감쇠에 따라 초기 진폭과 초기 위치를 변화하면서 진폭 감쇠율에 미치는 영향을 확인하기 위한 수치해석을 수행하였다. 그리고 수치해석을 위해 함수반복법을 사용하였는데 이는 기존의 해법들과 같이 비선형 편미분방정식을 약정식화 혹은 선형화하는 과정이 없이 미분항을 그대로 사용하였음에도 기존의 해법과 잘 일치하는 수치 해를 얻을 수 있음을 보였다.

수치해석 결과 Stokes 감쇠 계수가 충분히 작을 때는 반사파의 진폭 감쇠율은 초기 위치에 비해 초기 진폭에 지배적인 영향을 받았다. 특히, 초기 진폭이 클수록 파와 벽면의 상호작용이 짧아 감쇠율은 오히려 줄어드는 것을 알 수 있었다. 반면에 Stokes 감쇠 계수가 클 때는, 반사파의 감쇠율이 초기 진폭보다는 초기 위치에 큰 영향을 받음을 확인할 수 있었다.

따라서 자유수면 상의 얇은 유막 등과 같이 외부적 감쇠 요인을 고려한 파의 전파와 반사파의 수치해석에 있어, 외부적 감쇠의 크기에 따라 초기 진폭 및 초기 위치가 반사파의 특성에 큰 영향을 줄 수 있음을 알 수 있었다. 다만, 본 연구에서 수치해석에 사용한 개선된 부시네스크 방정식은 약 비선형성과 약 분산성의 특성으로 인해 대양에서 쓰나미의 전파에 대한 물리적 특성을 분석하는 데 제한적으로 사용된다. 따라서 향후 강 비선형성의 고차 부시네스크 방정식 및 Serre 방정식에 감쇠 특성을 고려한 후속 연구가 필요할 것으로 보인다.

후기

이 논문은 부산대학교 기본연구지원사업(2년)에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

References

Arévalo, E., Gaididei, Y. & Mertens, F.G., 2002. Soliton dynamics in damped and forced Boussinesq equations. *The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*, 27(1), pp.63–74.

Bona, J., Pritchard, L. & Scott, L., 1981. An evaluation of a model equation for water waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 302, pp.457–510.

Boussinesq, J., 1872. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 2^e série*, 17(2), pp.55–108.

Brocchini, M., 2013. A reasoned overview on Boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 469(2160), pp.1–27.

Cooker, M.J., Weidman, P.D. & Bale, D.S., 1997. Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 342, pp.141–158.

Debnath, L., 1994. *Nonlinear water waves*. Academic Press.

Dutykh, D. & Dias, F., 2007. Dissipative Boussinesq equations. *Comptes Rendus Mécanique*, 335, pp.559–583.

Dutykh, D., 2009. Visco-potential free-surface flows and long wave modelling. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28(3), pp.430–443.

El-Zoheiry, H., 2002. Numerical study of the improved Boussinesq equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 14, pp.377–384.

Jang, T.S., 2017. A new dispersion-relation preserving method for integrating the classical Boussinesq equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 43, pp.118–138.

Jang, T.S., 2018. An improvement of convergence of a dispersion-relation preserving method for the classical Boussinesq equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 56, pp.144–160.

Keulegan, G.H., 1948. Gradual damping of solitary waves. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 40(6), pp.487–498.

- Kim, H. & Oh, J., 2021. On the design of Novel hybrid wave generator. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 58(2), pp.112–120.
- Lee, J.I., Kim, Y.T. & Yoon, S.B., 2007. Stem wave analysis of regular waves using a Boussinesq equation. *Korean Society of Coastal and Ocean Engineers*, 19(5), pp. 446–456.
- Lin, Q., Wu, Y.H., Loxton, R. & Lai, S., 2009. Linear B-spline finite element method for the improved Boussinesq equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224(2), pp.658–667.
- Liu, P. & Orfila, A., 2004. Viscous effects on transient long-wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 520, pp.83–92.
- Lu, F., Song, Z. & Zhang, Z., 2016. A compact fourth-order finite difference scheme for the improved Boussinesq equation with damping terms. *Journal of Computational Mathematics*, 34(5), pp.462–478.
- Madsen, O.S., 1970. Waves generated by a piston-type wavemaker. *Proceedings of the 12th Coastal Engineering Conference*, American Society of Civil Engineers, 1, pp.589–607.
- Mei, C.C., 1983. *The applied dynamics of ocean surface waves*. World Scientific.
- Park, J., 2020. A numerical study of the damped improved Boussinesq equation: Dispersion-Relation Preserving (DRP) numerical solutions. Ph.D. Busan: Pusan National University.
- Wang, Q., Zhang, Z. & Zhu, Q., 2013. Numerical simulation of the stochastic damped improved Boussinesq equation. *Journal of Mathematical Physics*, 54(1), 013503.
- Wang, S. & Xu, H., 2013. On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with Stokes damped term. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 64, p.719–731.
- Wang, Q., Zhang, Z., Zhang, X. & Zhu, Q., 2014. Energy-preserving finite volume element method for the improved Boussinesq equation. *Journal of Computational Physics*, 270, pp.58–69.
- Wu, Y. & Hsiao, S., 2018. Generation of stable and accurate solitary waves in a viscous numerical wave tank. *Ocean Engineering*, 167, pp.102–113.
- Wu, Y. & Hsiao, S., 2018. Generation of stable and accurate solitary waves in a viscous numerical wave tank. *Ocean Engineering*, 167, pp.102–113.
- Zelt, J.A., 1991. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engineering*, 15, pp.205–246.
- Zhang, Z. & Lu, F., 2012. Quadratic finite volume element method for the improved Boussinesq equation. *Journal of Mathematical Physics*, 53(1), 013505.

