

# 심해 환경 하에서 내파 충격파를 받는 내압 선체의 동적 좌굴 평가 기법

노인식<sup>1,†</sup>·조상래<sup>2</sup>·조윤식<sup>3</sup>  
충남대학교 선박해양공학과<sup>1</sup>  
㈜울산랩<sup>2</sup>  
국방과학연구소<sup>3</sup>

## Dynamic Stability Assessment of Pressure Hull in Deep Sea against Implosion Pressure Pulse

In Sik Nho<sup>1,†</sup>·Sang Rai Cho<sup>2</sup>·Yoon Sik Cho<sup>3</sup>  
Dept. of Naval Architecture & Ocean Engineering, Chungnam National University<sup>1</sup>  
UlsanLap Co.Ltd<sup>2</sup>  
Agency for Defense Development<sup>3</sup>

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

In this study, the dynamic structural behavior of pressure vessels due to pressure pulse initiated by implosion of neighbouring airbacked equipments including Unmanned Underwater Vehicles (UUV), sensor system, and so on were dealt with for the structural design and safety assessment of pressure hulls of submarine. The dynamic buckling and collapse responses of pressure vessel in deep sea were investigated considering the effects of initial hydrostatic pressure and fluid-structure interactions. The governing equations for circular cylindrical shells were formulated theoretically assuming a relatively simple displacement fields and the derived nonlinear simultaneous ordinary differential equations were analysed by developed numerical solution algorithm. Finally, the introduced safety assessment procedures for the dynamic buckling behaviors of pressure hulls due to implosion pressure pulse were validated by comparing the theoretical analysis results with those of experiments for examples of simple cylinders.

**Keywords** : Implosion(내파), Pressure pulse(압력충격파), Pressure hull(내압 선체), Nonlinear ODE(비선형 상미분 방정식), Initial hydrostatic pressure(초기 정수압), Fluid-structure interactions(유체-구조 상호작용)

## 1. 서론

최근 심해저에서 높은 정수압을 받는 내압용기의 들의 연쇄적 급속붕괴 즉 내파(implosion) 사례들이 다수 보고되고 있어 (Gupta et al., 2016) 관련 연구가 활발하게 진행되고 있다. 특히 잠수함 내압선체의 구조안전성 문제에 있어서 외부에 장착된 센서시스템, 무인잠수정 등 특수 부가 장비들의 내파로 인한 충격은 인접 잠수함 내압 선체에 매우 인접한 근접 충격으로 작용하기 때문에 통상적인 원거리 수중폭발 보다 잠수함의 동적 안정성에 더 심각한 위협이 될 수 있다. 그 동안 내파 충격파에

대한 심도 있는 연구는 충분히 이루어지지 않았으며, 세계적인 관점에서 볼 때도 2000년대에 이르러서야 비로소 관심을 갖기 시작하였다.

수중 내파의 기전 특히 압력 충격파 형태의 에너지 전달 현상은 잠수체의 안전 및 효율적 설계에 중요한 요소이다. 아직 잠수체 내압선체 구조설계 과정은 보수적인 측면에서 다루어지고 있어 내압구조가 비교적 무거운 설계로 귀착되고 상대적으로 고비용, 비효율 설계가 되기 쉽다. 따라서 새로운 내파설계기법 요구되고 있으며, 이에 대응하기 위하여 내파로 인한 충격파의 발생 및 심해 정수압에서 내압선체의 충격파에 대한 구조 거동을 정량적으로 추정하기 위한 연구들이 심도 깊게 이루어지고 있다

(Turner and Ambrico, 2013).

하지만 국내에서는 아직 이와 같이 수중 무기체계에 심각한 위협이 될 수 있는 내파에 대한 기초적인 연구조차 이루어진 사례가 없어 관련된 기반 연구 활성화가 시급한 상황이다. 따라서 본 연구에서는 심해의 높은 정수압 하에서 내압용기의 내파로 인하여 발생된 근접 충격파의 전파 그리고 인접한 내압 선체의 동적 안정성 상실에 대한 영향을 규명함으로써 잠수함 부가 장비의 내파에 대비한 구조설계를 위한 기초자료를 제공하고자 한다.

막대한 계산 노력이 필요한 정밀한 비선형 유체 구조 상호작용 해석 기법을 설계 초기 단계부터 적용하기는 어렵다. 따라서 본 연구에서는 잠수체의 안전 설계를 위해서 초기 설계 단계에서 적용할 수 있는 좀 더 간편한 해석 및 안전성 평가 방법을 개발함으로써 정, 동적 외압에 의한 내압 구조의 붕괴현상 자체만 아니라 발생하는 압력 충격파의 발생과 전파뿐만 아니라 구조-유체 상호작용과 초기 정수압이 내압 구조의 내 충격 강도에 미치는 영향 등 상호 관계를 포괄하는 연구를 수행하였다.

이를 위하여 초기 정수압 하에서 충격파로 인한 내압 구조의 동적 좌굴거동에 대한 전반적인 과정의 기전(mechanism) 및 원리를 분석하여 정식화하고 도출된 비선형 지배방정식을 수치적으로 해석할 수 있는 기법을 개발하는 한편, 간단한 형상의 원통형 실린더를 대상으로 해석 결과와 실험 결과와 비교함으로써 개발된 방법의 유효성을 검증하였다.

## 2. 내파 충격파 시계열의 이상화

### 2.1 내파 충격파의 단계별 특성 및 모델링

본 연구에서는 기존의 내파실험에서 얻어진 내파 충격파 시계열들을 검토함으로써 내파 충격파 시계열의 전형적인 특성을 분석하는 한편 이를 바탕으로 주어진 내파 충격파 에너지로부터 내파 충격파 시계열을 모델링함으로써 내파 충격파의 피크치 크기 및 지속시간 추정할 수 있는 이상화 방안을 제안하였다.

먼저 대부분의 내파실험 자료들로부터 관찰된 충격압력 시계열들은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 압력(over-pressure)이 시작 시점에서는 음의 값은 보이다가 급격한 양의 충격파(spike) 형상으로 전환됨을 입증하고 있다. 이와 같은 역적의 역전 현상 고려하여 내파에너지가 2개의 충격파로 분산되는 것으로 간주한다.

따라서 Fig. 1에서 보는 것처럼 실제의 원통 실린더의 내파 시 발생하는 충격파 시계열은 2개의 반대 방향 삼각형 충격파로 이상화 할 수 있다. 이때, 내파에 의한 충격파는 대체로 수중 구조체의 고유진동주기 보다는 상당히 짧은 지속시간을 보이고 있으므로 잘 알려져 있는 바와 같이 구조체의 거동은 압력의 최대치가 아닌 충격량(역적, impulse)에 비례하는 영역에 속하게 된다. 따라서 2개의 삼각형 충격파는 Fig. 2에서 보인 바와 같이 각각 면적(역적)이 1인 단위 충격파에 비해 계수를 곱하여 나타낼 수 있는데, 두 충격파의 작용시간 간격  $\Delta t$ 의 영향은 있을 수 있지만 지속 시간 자체의 크기는 크게 중요하지 않다.

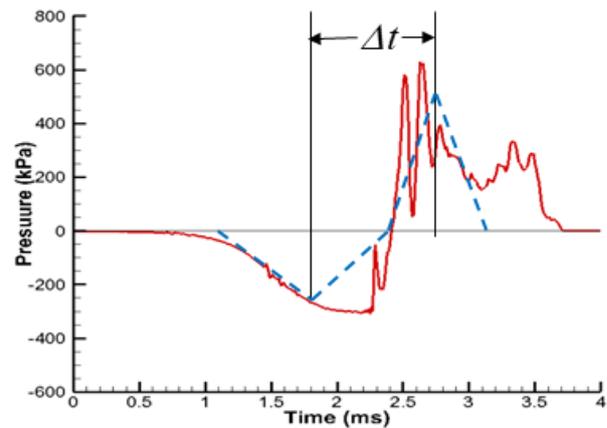


Fig. 1 Typical time history of pressure pulse during implosion test of circular cylinder model (Nho et al., 2020)

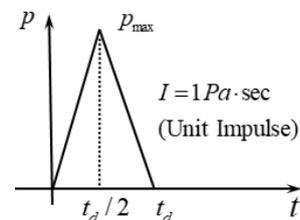


Fig. 2 Unit impulse of pressure

실험결과나 참고문헌 (Nho et al., 2020)에서 내파 충격파의 형상을 살펴보면 대체로 음과 양 방향 충격량  $I_1, I_2$ 가 거의 비슷한 크기로 나타나므로 충분한 정보가 없는 경우에는 개략적으로 같은 값으로 간주해도 무방할 것으로 판단된다.

내파 충격파를 받는 인접 구조체의 응답이 작용 충격파의 역적에 비례한다면 2개 충격파에 대한 응답의 선형 조합으로 간주할 수 있으므로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$R(t) = \begin{cases} -I_1 R_{UI}(t) & \text{when } 0 \leq t < \Delta t \\ -I_1 R_{UI}(t) + I_2 R_{UI}(t - \Delta t) & \text{when } t \geq \Delta t \end{cases} \quad (1)$$

여기서,

$R(t)$  : Structural response due to real Impulse

$R_{UI}(t)$  : Structural response due to unit Impulse

### 2.2 이상화 내파 충격파 시계열의 타당성 검증

이와 같은 충격거동 해석 기법(충격응답 중첩법)의 타당성을 검증하기 위해 간단한 시계산을 수행하였다. 실제 선각 구조에 흔히 적용되는 형태의 4변이 단순지지된 강재 직사각형 패널 (3,100×780×25(t) mm)에 Fig. 1에 보인 것처럼 압력 챔버 모형 실험에서 원통 실린더 모델 내파 시 계측된 실제 충격파 (Nho et al., 2020)와 함께 이를 앞서 논의한 이중 삼각형 충격파로 이상화된 압력시계열을 가하여 각각 응답을 해석한 다음 도출된 직사각형 판의 동적 응답 결과를 서로 비교하였다.

이때 압력 시계열의 음 및 양의 역적은 실제 시계열로부터 계산 가능하므로 이 값을 사용하였다. 이상화된 시계열에서 두 충격파의 작용시간 간격  $\Delta t$ 에 따라 구조 응답이 달라질 수 있으므로 다음과 같은 조건을 적용하여 계산하였다.

$$I_1 = 268, I_2 = 312 (Pa \cdot sec), \Delta t = 0.5, 1, 1.5 (ms)$$

3가지 작용시간 간격  $\Delta t$ 에 따른 판 중앙 지점에서의 변형 해석 결과를 실제 계측된 시계열에 의한 해석 결과와 비교하여 검토하였다.  $\Delta t$ 의 간격에 따라 결과가 약간씩 달라지기는 하지만 실제 간격과 유사한  $\Delta t=1.0ms$ 로 주어진 경우에는 Fig. 4에서 보인 것과 같이 변위 응답의 피크치와 주기 측면에서 거의 동일한 결과를 보이고 있다. 이때 두 응답 간에 나타나는 시간지연 효과는 압력이 작용되기 시작하는 시점이 이상화된 시계열 쪽이 실제 시계열보다 조금 이르기 때문이다. 이것으로 Fig. 3과 같은 내파 충격파 시계열의 이상화 방법 및 간이 해석 절차의 타당성은 입증된 것으로 판단할 수 있다.

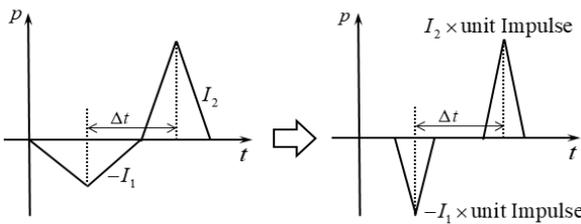


Fig. 3 Idealization of implosion pressure pulse time history by superposition of 2 unit pressure impulses

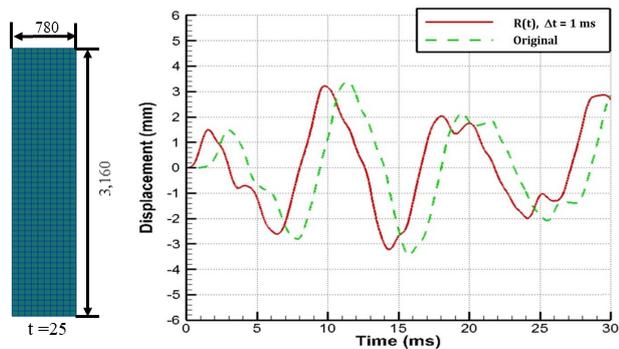


Fig. 4 FE model of rectangular panel and obtained time histories of displacement at center of panel

### 3. 충격파에 의한 내압 구조의 구조 거동

#### 3.1 내압 구조의 동적 좌굴

구조물의 동적 좌굴문제는 진동좌굴(vibration buckling) 문제와 충격좌굴(pulse buckling)문제로 구분할 수 있다. 진동좌굴은 구조물의 진동 진폭이 반복적으로 작용하는 어떤 특정 주파수와 진폭을 갖는 하중(oscillatory loads)에 의해 허용수준 이상으로 커지는 현상을 말하며, 충격좌굴(pulse buckling) 문제는 충격파

(single pulse)와 같은 과도 하중(transient loads)에 의해 발생하는 구조물의 동적 변형, 진동모드 및 지속시간과 함께 구조물의 구조적 안전성 문제를 검토한다. 본 연구에서는 내파 충격파에 의한 내압선체의 구조적 안전성 문제에 관심이 있으므로 충격좌굴 문제를 집중적으로 다루고자 한다.

#### 3.1.1 실험적 연구 동향

심해저에서 내압 선체가 인접 외장장비의 내파로 인한 충격파를 받게 되면 공기 중에서의 충격파에 대한 거동과는 판이한 특성을 보이게 된다. 심해의 정수압은 이미 내압 선체의 강도를 상당히 저하시키는 역할을 하게 되며 추가적인 충격하중에 매우 취약한 상태에 될 수 있으므로 이에 대한 합리적인 평가가 필요하다. 즉, 정수압이 내압선체의 임계 압력에 가까운 값에 이르면 내압선체의 잔류 강도가 거의 남지 않은 상태에 근접하게 되므로 약간의 외부 충격에 대해서도 곧 바로 붕괴로 이어질 수 있다. 또한 수중에서 거동하게 되므로 유체와 구조 사이의 동적 상호작용(유탄성 거동)을 고려해야 한다. 비정상 상태의 유탄성 거동을 정확히 다루기는 어렵기 때문에 본 연구에서는 통상적인 부가수 질량(added mass) 문제로 접근 하고자 한다.

Lindberg & Florence (1987)의 연구는 공기 중 충격파를 받는 원통형 실린더의 변형 문제를 다룬 바 있다. 원통 실린더가 충격파를 받을 때 발생하는 동적좌굴 거동에 대한 지배 방정식을 연구하였으며, 폭약을 이용한 공기 중 실험을 수행하여 그 결과를 고찰하였다. 충격파에 의해 고차 좌굴 모드가 발현됨을 확인할 수 있고 압력파의 지속시간이 길어져 준정적 상태가 되면 좌굴 파형은 훨씬 저차모드로 회귀됨을 밝히고 있다. 공기 중 실험이므로 부가수 질량 효과가 고려되지 않았고 초기 정수압 역시 구형될 수 없었기 때문에 본 연구와 직접적인 연계는 어려웠으나 함께 진행된 해석적 지배방정식의 유도과정은 이어지는 연구에 참고가 되고 있다.

Damazo et al. (2010)은 물의 채운 압력 챔버(내경 38.1mm, 벽 두께 25.4mm) 내부에 원통 실린더형 시편을 설치하고 변형도 게이지, 압력 게이지 등 센서들을 설치한 다음, 한 쪽 끝에서 강제 발사체를 충돌시켜 발생된 수격(water hammer) 효과를 이용하여 시험체의 충격 거동을 연구하였다. 시편에서 발생된 변형도(strain)와 수중의 압력파 진전 속도를 계측하여 결과를 분석하고 현상을 고찰하였다.

Bitter & Shepherd (2014)는 Damazo et al. (2010)의 실험을 참고하여 더욱 정교한 원통형 고압 압력 챔버를 제작하여 실험을 수행하고 간이 해석 결과와 비교하였다. Damazo et al. (2010)와 유사한 방법으로 고압 챔버 한쪽 단에서 가스총으로 발사체를 쏘아 충격파를 발생시킨 다음, 내부에 설치된 원통형 내압용기 시편의 동적 응답과 압력파의 전파 양상을 고찰하였다. 정수압 크기에 따른 시험체의 내충격 거동 즉 변형도의 시간이력을 계측하였고 시편에 존재하는 초기 부정(initial imperfections)의 영향, 부가수 질량 효과 등을 검토하였다. Matos et al. (2018), Gupta et al. (2016), Pinto (2016) 등의 연구는 고압 챔버 실험 결과를 기반으로 원통형 시험체의 다양한 충격파 응답에 관한 자료를 제

시한 바 있으며 이론적 정식화에도 상당한 진전을 보이고 있다.

Matos et al. (2018), Gupta et al. (2016)의 연구는 고압 챔버 내에서 충격파를 구현하기 위하여 앞서 수행된 연구에서 사용되었던 water hammer 대신 소량의 폭약(RP-80)의 수중 폭발 시 발생하는 충격파를 이용하였다는 점, 길다란 원통 용기 내에서 진행되는 평면 파형의 충격파 거동을 고찰하였다는 점, 그리고 내파 과정의 유체-구조 상호작용에 대한 이해하기 위하여 실시간 고속 변형 영상을 얻는 목적으로 2대의 고속 카메라를 이용하는 DIC(Digital Image Correlation) 기술을 적용한 점 등 공통된 실험 기법을 적용하고 있다. Matos et al. (2018) 및 Gupta et al. (2016)의 연구에서는 부가수 질량 효과는 물론 초기 정수압의 증가에 따른 시험체의 변형 및 강도 변화를 동시에 고찰하였다. 초기 정수압이 증가할수록 시험체의 강성은 약화되며 이에 따라 시험체의 고유진동수 저하 및 충격파에 대한 진동 진폭 응답이 증가됨을 확인하였다. 따라서 수중구조체의 동적좌굴 설계를 위해서는 반드시 초기 정수압이 고려되어야 한다. 구조물 변형의 비선형적 특성 때문에 구조체의 강성은 임계 붕괴압력 부근에서 급격히 약화되는 경향이 있으며, 추가적인 충격 하중에 더욱 민감하게 파괴로 이어질 수 있음을 보였다.

### 3.1.2 이론해석 기법 관련 연구동향

초기 정수압 하에서 충격파에 대한 원통 실린더의 동적좌굴 특성을 연구하기 위하여 해석적 접근 방법으로 운동 방정식을 유도하였다. 일반적인 3차원 곡면 쉘 문제는 매우 복잡한 정식화 과정을 거쳐 해석적인 해를 구하기 어려운 원통좌굴계의 편미 방정식형 지배방정식으로 귀착되기 때문에 현실적인 문제를 해결하는 데는 그다지 적합하지 않다. 따라서 몇 가지 이상화된 변위 가정을 이용하는 간단한 정식화 과정이 제안되고 있다.

수격 효과를 이용한 고압 챔버 내 시험체의 충격파 응답 실험을 수행한 바 있는 Bitter and Shepherd (2014)는 2차원 평면 변형도(2-D plane strain) 기반 운동 방정식을 정립하고 부가수 질량 계수를 유도하여 유체-구조 상호작용을 고려한 정식화하는 연구를 수행하였으며, 제안된 해석법과 실험 결과를 비교 검토함으로써 타당성을 상호 검증하였다. 이 방법은 길이 방향의 변형 성분을 무시하고 원주 방향의 변형 분포만 고려하고 있기 때문에 일반적인 형태의 원통 실린더에 모두 그대로 적용하기 어렵지만 원환 또는 비교적 L/D 가 큰 원통 실린더 문제에 적용 가능하며 비교적 정도 높은 해를 제공할 수 있는 것으로 알려져 있다. Gupta et al. (2016)은 여기에 초기 정수압의 영향을 추가하여 초기 정수압이 수중 충격파를 받는 원통 실린더의 동적 좌굴에 미치는 영향을 실험 결과와 비교하여 고찰하였다.

## 3.2 내압 구조 동적 좌굴 응답의 지배방정식

### 3.2.1 원통 실린더의 기본 운동 방정식

본 연구에서도 이와 같은 선행 연구들을 기반으로 Fig. 5에서

보인 바와 같이 원통형 압력 챔버 내부에 설치되어 충격파를 받고 있는 원통 실린더 형 내압 구조의 동적 좌굴 응답에 대한 지배방정식을 유도하였다. Fig. 6에서 보인 미소 원통요소에 대한 변형의 기하학을 고찰하여 변위-변형도 관계를 정의하고 에너지 원리(Euler-Lagrange eq.)로부터 운동방정식을 도출한다.

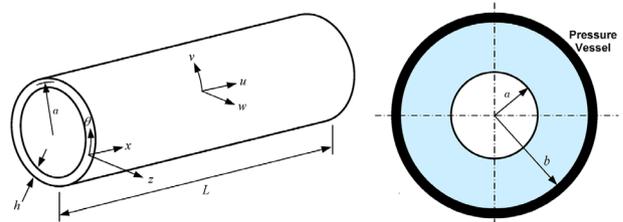


Fig. 5 Diagram of two-dimensional ring with surrounding annulus of fluid

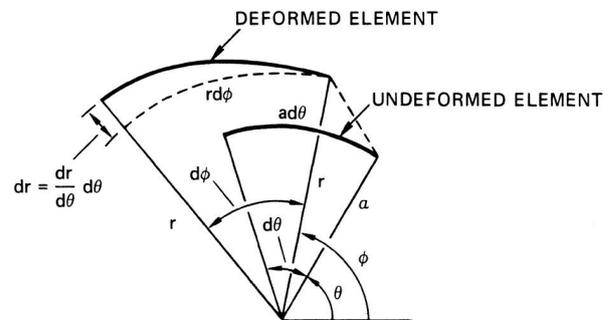


Fig. 6 Kinematics of differential displacements of middle surface (Lindberg & Florence, 1987)

여기서,  $\kappa, z$ 는 각각 실린더 외판의 원주방향 곡률(curvature)과 판의 중앙면에서 두께 방향 좌표를 의미한다. 여러 가지 변형도-변위 관계식이 제안된 바 있으나, 본 연구에서는 Lindberg and Florence (1987)의 연구를 참고로 변형의 기하학(kinematics)을 고려하여 다음과 같이 정리하였다.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} - \frac{w}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} - w_i \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{1}{a^2} \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (3)$$

여기서,  $u, v, w$ 는 Fig. 5, 6에서 보는 바와 같이 각각  $x, y, z$ 방향 즉, 길이, 반경, 두께 방향 변위를 나타내고 있으며,  $r, \theta$ 는 두께 방향 및 원주 방향 좌표,  $a(=R)$ 는 실린더의 반경을 그리고 아래 첨자  $i$ 는 초기 부정 성분임을 의미한다. 이를 이용하여 원통 실린더의 단위 길이 당 변형에너지  $U$ 와 운동에너지 성분  $T_K$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \frac{Eha}{(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \left( \epsilon_0^2 + \frac{h^2}{12} \kappa^2 \right) d\theta \quad (4)$$

$$T_k = \frac{1}{2} \rho h a \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] d\theta \quad (5)$$

이때, E, ν는 각각 재료의 탄성계수와 Poisson 비, h는 실린더 외판의 두께이다. 실린더 단위 길이 당 외부 정수압 p가 한 일 W<sub>p</sub>는 다음 식으로 얻어진다.

$$W_p = \int_0^{2\pi} (pw) a d\theta \quad (6)$$

수식들을 좀 더 간단한 형태로 정리하기 위하여 변위, 두께, 시간, 압력 등 물리량들에 대한 정규화된 무차원 계수들을 다음 식 (7)과 같이 도입하고, 식 (4)~(6)으로 표현된 에너지, 일을 무차원 계수로 식 (8)와 같이 다시 정리한다.

$$[W, V, W_i, V_i]^T = \frac{1}{a} [w, v, w_i, v_i]^T \quad \beta^2 = \frac{h^2}{12a^2} \quad (7)$$

$$\tau = t \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)a^2}} \quad P = \frac{pa(1-\nu^2)}{Eh}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Eha}{(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} (\epsilon_0^2 + \beta^2(\kappa a)^2) d\theta$$

$$T_k = \frac{1}{2} \frac{Eha}{(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} (\dot{W}^2 + \dot{V}^2) d\theta \quad (8)$$

$$W_p = \frac{Eha}{(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} P W d\theta$$

무차원 변수들을 Fourier series로써 다음과 같이 가정한다.

$$W = W_0(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} W_n(\tau) \cos(n\theta), \quad V = \sum_{n=2}^{\infty} V_n(\tau) \sin(n\theta)$$

$$P = P_0(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\tau) \cos(n\theta) \quad (9)$$

$$\{W_i, V_i\} = \sum_{n=2}^{\infty} \{\delta_n, \alpha_n\} \cos(n\theta) + \{\gamma_n, \beta_n\} \sin(n\theta)$$

여기서, {δ<sub>n</sub>, α<sub>n</sub>}, {γ<sub>n</sub>, β<sub>n</sub>}는 각각 반경 방향 및 원주 방향의 초기부정(initial imperfection) 크기 {W<sub>i</sub>, V<sub>i</sub>}의 cosine 및 sine 성분 Fourier 계수를 의미한다. 이 식에서 변위의 sine 성분이 0임에 주목할 필요가 있는데 이것은 이 성분이 0이 되도록 대칭축이 되는 위치에 좌표 원점을 설정할 수 있기 때문이다.

식 (9)의 변위 함수들을 각각 변형에너지(strain energy), 동적 에너지(kinetic energy), 외력에 의한 일을 나타내는 식 (8)의 에너지 항들에 대입하여 정리하면 식 (10)으로 변환할 수 있다. 이 과정에서 Fourier series 삼각함수 항들의 직교성으로 인해 많은 항들이 0이 되기 때문에 이 성질로 인해 초기 부정에 대한 Fourier 계수 중 유일하게 δ<sub>n</sub>만 역할을 하게 된다.

$$U = \frac{Eha\pi}{(1-\nu^2)} [W_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \{\beta^2(n^2-1)^2 - W_0(n^2-2)\} W_n^2 - \sum_{n=2}^{\infty} W_0(n^2-2)\delta_n W_n] + O(W_n^4)$$

$$T_k = \frac{Eha\pi}{(1-\nu^2)} \left\{ \dot{W}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n^2+1}{n^2} \right) \dot{W}_n^2 \right\} \quad (10)$$

$$W_p = \frac{Eha\pi}{(1-\nu^2)} \left\{ 2P_0 W_0 + \sum_{n=2}^{\infty} P_n W_n \right\}$$

3가지 에너지 성분에서 변분법으로 Euler-Lagrange eq.을 유도하여 정리하면, 이 시스템의 운동방정식이 W<sub>0</sub>, W<sub>n</sub>에 관한 비선형 연립 상미분방정식 형태로 다음과 같이 얻어진다.

$$\ddot{W}_0 + W_0 = P_0 + O(W_n^2) \quad (11)$$

$$\left( \frac{n^2+1}{n^2} \right) \ddot{W}_n + [\beta^2(n^2-1)^2 - W_0(n^2-2)] W_n = P_n + W_0(n^2-2)\delta_n + O(W_n^3) \quad (12)$$

이 두 식에서 고차 항들은 무시할 수 있다. 식 (11)은 변형의 축대칭 성분 즉 균일한 수축 또는 팽창 성분에 대한 운동방정식이며 식 (12)은 축대칭 변형 W<sub>0</sub>에 의해 생성되는 n≥2의 비축대칭 모드 즉 굽힘 변형 모드인 W<sub>n</sub>의 발전을 표현한다. 굽힘 모드 W<sub>n</sub>은 축대칭 모드 W<sub>0</sub>와 연성되며 우변의 하중 항에는 초기부정 δ<sub>n</sub>항이 포함된다. 즉 초기부정의 크기가 굽힘 모드에 직접적인 영향을 주게 된다. 이 운동방정식들을 풀기 위해서 초기부정 δ<sub>n</sub>을 합리적으로 추정해야 한다. 크기가 미소하므로 어렵기는 하지만 축적된 계측자료를 활용할 수 있을 것이다.

### 3.2.2 접수 진동 효과

Bitter and Shepherd (2014)는 접수진동 시 나타나는 유체-구조 상호작용을 통상적인 부가수 질량 효과로 처리하는 방법을 제안하였다. 식 (12)에서 P<sub>n</sub>은 실린더의 진동 및 주위 유체와의 공진에 의해 발생하는 압력 성분(self-induced pressure loads)으로 이것을 얻기 위하여 원통 실린더 주위 유동의 속도 포텐셜과 이에 대한 선형파동방정식을 정식화하여 정리하여 압력 및 속도 관계식이 유도되고, 이를 이용하여 부가수 질량 계수는 다음과 같이 얻어짐을 보였다.

$$M_a \equiv \frac{m}{\rho h} \frac{n^2}{n^2+1} = \left[ \frac{\rho_w a}{\rho h n} \left( \frac{(b/a)^{2n}+1}{(b/a)^{2n}-1} \right) \right] \left( \frac{n^2}{n^2+1} \right) \quad (13)$$

$$\approx \frac{\rho_w a}{\rho h n} \left( \frac{n^2}{n^2+1} \right) \quad \text{for infinite water domain}$$

이 식들을 이용하여 부가수 질량 효과를 고려하게 되면 식 (11),(12)의 운동 방정식은 최종적으로 다음과 같이 정리된다.

$$\ddot{W}_0 + W_0 = P_0 \quad (14)$$

$$\ddot{W}_n + [\Omega_n^2 - F_n^2 W_0(\tau)] W_n = F_n^2 W_0(\tau) \delta_n \quad (15)$$

여기서,

$$\Omega_n^2 = \frac{n^2 \beta^2 (n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)(1 + M_a)}, \quad F_n^2 = \frac{n^2 (n^2 - 2)}{(n^2 + 1)(1 + M_a)} \quad (16)$$

정적 변형 문제라면 식 (14)에서 시간에 대한 미분 항은 0이 되므로 식 (14)은  $W_0 = P_0$ 이 되고, 이 시점에서 강성이 0 이므로 식 (15)에서  $\Omega_n^2 = F_n^2 P_0$  이 된다. 결국, n-차 모드의 정적 좌굴 압력은 다음 식으로 얻어진다.

$$P_{cr-n} = \beta^2 \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 - 2}, \quad p_{cr-n} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)a^3} \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 - 2} \quad (17)$$

### 3.2.3 초기 정수압을 고려한 운동방정식

Gupta et al. (2016)은 비 축대칭 변형에 대한 운동방정식을 의미하는 식 (19)에서 실린더의 고유진동수를 나타내는 계수  $\beta^2(n^2-1)^2$ 에 초기정수압  $P_n$ 에 의해 발생하는 원주방향 응력  $\bar{N}$ 이 실린더의 진동수에 미치는 영향을 고려하면 이 항은  $\beta^2(n^2-1)^2 + (n^2-1)\bar{N}$  로 수정될 수 있음을 보였다. 따라서 최종적으로 부가수 질량 및 초기 정수압 효과를 고려한 굽힘 모드에 대한 수정된 운동 방정식은 식 (18)과 같이 유도된다.

이때 식 (15)을 좀 더 간단히 정리하기 위하여,  $(n^2-1)\bar{N}$  항을 식 (17)의 정적좌굴압력  $P_{cr-n}$ 의 항으로 표현할 수 있다.

$$\left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right) (1 + M_a) \ddot{W}_n(\tau) + [\beta^2(n^2 - 1)^2 \left( 1 - \frac{P_{in}}{P_{c,plane}} \right) - (n^2 - 2) W_0(\tau)] W_n(\tau) = \bar{P}_n(\tau) + (n^2 - 2) \delta_n W_0(\tau) \quad (18)$$

식 (18)는 초기정수압, 부가수질량 효과를 모두 고려한 최종적인 운동방정식으로 축대칭 및 굽힘 모드가 연성되어 있다. 따라서 식 (15)는 다음과 같이 최종적인 형태로 수정된다.

$$\ddot{W}_n + [\psi_n^2 - F_n^2 W_0] W_n = M_n^2 P_n + \delta_n F_n^2 W_0 \quad (19)$$

여기서,

$$M_n^2 = \frac{n^2}{(n^2 + 1)(1 + M_a)}, \quad F_n^2 = (n^2 - 2) M_n^2, \quad \psi_n^2 = \frac{1}{3} s^2 (n^2 - 1)^2 M_n^2 \left( 1 - \frac{P_{in}}{P_{c,plane}} \right) \quad (20)$$

이 때, 압력파의 시간에 따른 전파 현상은 무시하고 전 영역에서 동시에 작용하는 것으로 가정한다. 해석 순서는 축대칭 진동 응답을 나타내는 식 (14)을 먼저 풀고, 이 결과로 계산된  $W_0$ 를

이용하여 식 (19)의 비 축대칭 변형 성분  $W_n$ 를 시간영역에서 구한다. 계수가 시간영역에서 계속적으로 변화하는 비선형 연립 상미분 방정식이므로 해석적 방법으로는 해를 구하기 어려우며 수치해석 기법을 이용한 정밀한 접근 방법이 필요하다.

## 3.3 초기 정수압을 고려한 내압 구조의 동적 좌굴 해석

### 3.3.1 내압 구조의 동적 좌굴 안정성 검토 절차

전 절에서 기술한 바 있는 Matos et al. (2018)의 개념과 해석적으로 유도된 식 (14),(19)의 연립 비선형 상미분 방정식 형태의 운동방정식을 이용하여 초기 정수압 크기에 따른 내압 구조의 동적 좌굴 가능성을 검토할 수 있는 절차를 Fig. 7과 같이 제안하였다. 먼저 Nho et al. (2017)이 제안한 방법에 따라 주어진 대상 내압 구조의 기하학적 형상으로 정적 비선형 대변형 해석을 수행한다. ABAQUS 등 상용 유한요소 해석 프로그램을 사용할 수 있으며 변형 연화 현상을 원활하게 시뮬레이션하기 위하여 Riks의 호장중분법(Arc length method)를 적용한다.

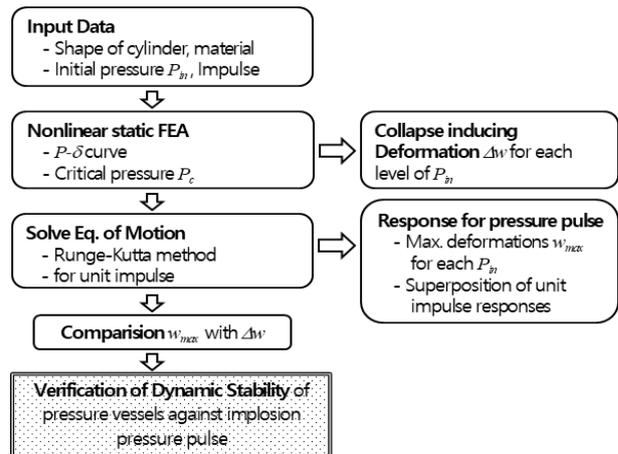


Fig. 7 Safety assessment procedure for dynamic collapse of pressure vessel considering initial hydrostatic pressure

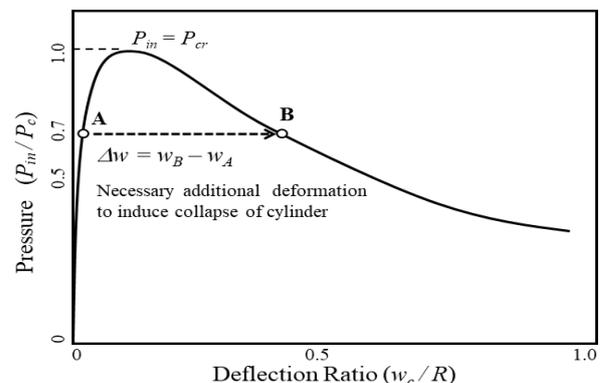


Fig. 8 Schematic non-linear static pressure-deflection curve for cylindrical shell

구해진 내압 구조의 압력-변형 관계 곡선 예를 Fig. 8에 보였다. 이 그래프로부터 안전성 평가 대상이 되는 실린더의 초기 정수압에 따른 허용 변형 크기  $\Delta W = W_B - W_A$ 를 산출할 수 있다.

### 3.3.2 충격파에 대한 내압 구조의 동적 응답 해석

다음 단계로 식 (14),(19)의 운동방정식을 풀어 초기 정수압 크기에 따른 내압 구조의 내파 충격파에 대한 동적 응답 최대치  $w_{max}$ 를 계산한다. 이 운동방정식들은 연립 비선형 상미분 방정식 (ODE) 형태로 표현되므로 통상의 해석적 방법으로는 정해를 구할 수 없다.

본 연구에서는 Runge-Kutta 법에 의한 시간영역 수치적분 기법을 적용하였다. 상용 code 인 MATLAB의 상미분 방정식 해석용 함수를 활용하였으나 상미방의 계수가 시간의존적인 비선형적 특성을 고려할 수 있도록 새로운 알고리즘을 구성하였다.

내파 충격파 시계열은 Fig. 3에서 보인 것처럼 두 개 삼각형 충격파의 중첩으로 이상화 할 수 있고, 이 충격파에 의한 내압 구조의 동적 응답은 식 (4)에서 보인 바와 같이 2개 충격파에 대한 응답의 합산 즉, 단위 충격량을 갖는 충격파에 대한 내압 구조 동적 거동의 선형조합으로 나타낼 수 있다.

이렇게 얻어진 주 실린더 동적 응답의 최대 크기  $w_{max}$ 를 정적 비선형 해석으로 얻어진 초기 정수압에 따른 허용 변형 크기  $\Delta w$ 를 상호 비교하여 주 실린더의 동적 좌굴 안정성을 판단할 수 있다. 즉, 최대 동적 응답  $w_{max}$ 가 허용 변형  $\Delta w$  보다 크게 나타나면 동적 좌굴 가능성이 크다는 것을 의미한다. 물론 여기서 동적 응답의 최대 크기  $w_{max}$ 는 소성 대변형을 고려하지 않은 선형 탄성해이므로 물리적으로 정확한 결과로 보기는 어렵다. 그러나, 잠수함 내압선체의 내 충격 거동의 추정 및 이해를 바탕으로 초기 설계단계의 지침으로는 충분히 활용 가능할 것으로 사료된다.

## 4. 해석 결과 및 검증

이와 같은 초기 정수압 하에서 내파 충격파를 받는 내압 구조의 거동과 동적 좌굴 안정성 추정 절차를 검증하기 위하여 압력 챔버에서 수행된 단독 및 복수 모델 실험 결과에 본 해석 절차를 적용하여 해석한 다음, 결과를 검토하였다.

복수 모델 내파실험은 Fig. 9처럼 붕괴 임계압력이 다른 2개의 시험체를 한 쌍으로 묶어 압력 챔버 내부에 설치한 후 실험한다. 압력을 점진적으로 높이면 2개 시험편 중 임계압력이 낮아 선행 내파를 일으키는 부시편(initiator)에서 먼저 좌굴이 발생하게 되는데 이때 발생하는 내파 충격파에 의해 인접하는 주 시험체가 연속적으로 붕괴로 이어지는지 가능성을 검토하였다.

C8, C9, C10 등 3 종류의 모델이 사용되었고 복수 모델 실험에서는 C8-C9, C9-C10 두 쌍의 시험편으로 실험을 수행하였다. 각각 시험편들의 도면과 형상을 Fig. 10에 보였으며 각각의 치수와 함께 단독 내파 실험에서 얻어진 임계압력, 내파충격파에 기인하

는 충격량  $I_1, I_2$  등을 Table 1에 정리하였다.

먼저 Fig. 8과 같이 초기 정수압에 따른 실린더의 허용 변형  $\Delta w$ 산출하기 위하여 상용 유한요소해석 코드인 ABAQUS를 이용하여 주 실린더인 C9,C10 시험편에 대한 정적 비선형 좌굴 응답 해석을 수행하였고 C10의 결과를 Fig. 12에 나타내었다.

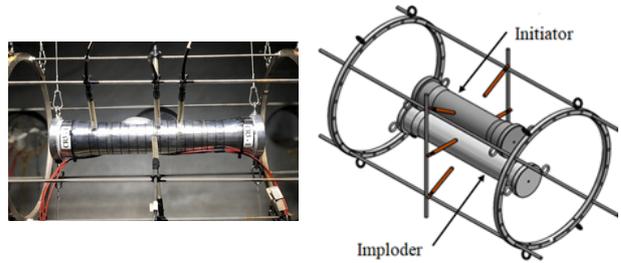


Fig. 9 Implosion test set-up for 1 and 2 cylinders

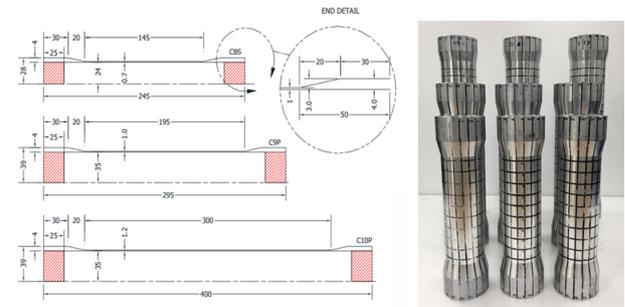


Fig. 10 Details of C8, C9, C10 specimens

Table 1 Particulars and implosion test results for single specimens

Model	L, R, t(mm)	$P_c$ (MPa)	$I_1$ (Pasec)	$I_2$ (Pasec)
C8	145, 24.0, 0.7	1.40	199	228
C9	195, 35.5, 1.0	2.11	564	645
C10	300, 35.6, 1.2	2,27	784	713

\*  $I_1, I_2$  : obtained from measured pressure time histories

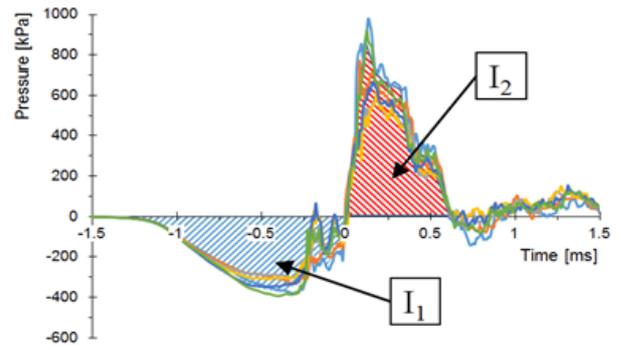


Fig. 11 Time history of pressure pulse due to implosion and negative/positive impulse

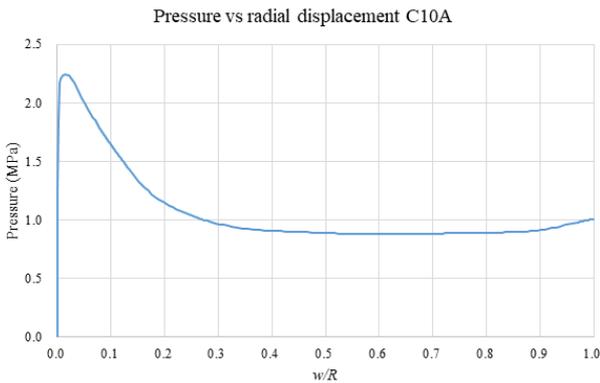


Fig. 12 Pressure-displacement curve for C10 specimens

다음 단계로 Runge-Kutta 법으로 비선형 연립 상미분방정식 형태의 운동방정식 식 (14),(19)을 수치적으로 풀어 초기 정수압에 따른 동적 응답의 최대 크기  $w_{max}$ 를 계산한다. 초기 정수압  $P_{in}$ 의 크기를 변화시켜 가면서 Fig. 20에 보인 3각형 단위 충격량 충격파에 대한 C9 및 C10 시편의 동적 거동을 계산하였다. 이때, 두 충격파의 작용시간 간격은  $\Delta t=0.1ms$ 으로 간주하였다.

초기 정수압 크기 변화에 따른 C9 및 C10 시편들의 동적 응답 시계열과 피크치를 Fig. 13~15에 보였다. 초기 정수압이 커질수록 동적 응답 진폭은 커지고, 진동 주기는 길어짐을 확인할 수 있다. 이것은 초기 정수압이 커질수록 내압 구조의 강성이 점차 작아짐을 의미하며 임계 압력에서는 강성이 0에 수렴함에 따라 급속한 붕괴로 이어지는 것으로 이해할 수 있다.

비축대칭 성분에 대한 지배방정식인 식 (19)의 해는 충격 압력과 초기부정  $\delta_n$ 의 원주방향 조화(harmonics) 성분 크기에 따라 결정된다. 우선 충격파는 원주방향으로 균일한 것으로 간주하였으므로 비 축대칭 성분들은 무시하였다. 초기부정  $\delta_n$ 의 크기 역시 실험 시 계측자료를 기반으로 기본 모드인  $\delta_2$ 만 반경의 3% 정도로 추정하였고 나머지 성분들은 무시하고 계산을 진행하였다. 따라서 실린더의 충격 응답에 있어서 고차 성분들은 나타나지 않았고 기본 모드인  $n=2$  모드 성분만 도출됨을 볼 수 있다.

부가 장비의 내파에 대한 안전성 검토 대상 즉 내압 선체를 의미하는 주시편인 C9, C10 시편에 작용하는 충격파 시계열은 Fig. 3에 보인 바와 같이 2 개의 삼각형 단위 충격파의 중첩으로 이상화될 수 있으므로 식 (4)의 계산 절차에 따라 실제 최대 동적 응답  $w_{max}$ 을 계산할 수 있다. 이때 먼저 내파가 발생하는 부시편의 붕괴 압력인  $P_c$ 가 동적좌굴 가능성 검토 대상인 주 실린더의 초기 정수압  $P_{in}$ 이 된다. 이상화된 내파 충격파를 받는 실린더의 동적 응답의 시계열을 Fig. 16에 보였다. 이렇게 얻어진 충격파에 대한 동적 응답  $w_{max}$ 를 실린더의 잔류강성을 의미하는 초기 정수압 크기에 따른 허용변형  $\Delta w$ 와 상호비교함으로써 대상 실린더의 동적 좌굴 안정성을 평가할 수 있다. 두 쌍의 복수 모델 내파시험에 대한 계산 결과를 Table 2에 정리하였다.

C9 - C8 복수 시험편 실험에서는 두 실린더의 붕괴 압력이 서로 상당한 차이가 나며 C9 입장에서는 C8 시편 붕괴 당시의 정수압이 상대적으로 작은 값이 되므로 불안정 붕괴로 이어지기

위해서는 추가적인 충격량이 커야 하지만 C8 내파 시 발생하는 충격파는 이에 미치지 못하므로 연속적인 붕괴는 발생하지 않는다.

반면, C10-C9 복수 시험에서는 두 실린더의 임계 압력이 각각 2.11/2.27 MPa로 거의 근접한 값이므로 불안정 붕괴에 필요한 추가적인 충격량이 작고 C9 내파 시 발생하는 충격파가 이 충격량을 초과하므로 연속적인 붕괴가 발생된다.

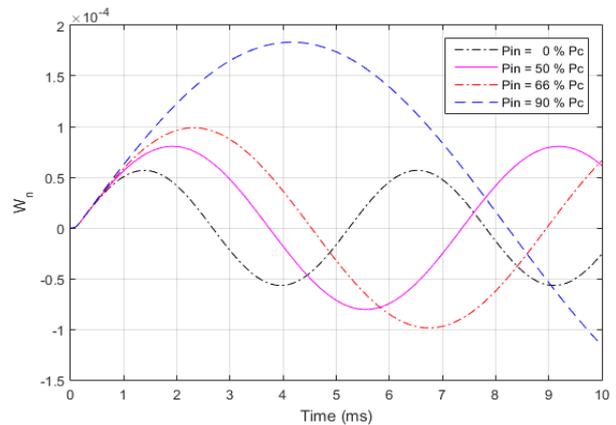


Fig. 13 Unit impulse responses of C9 specimen

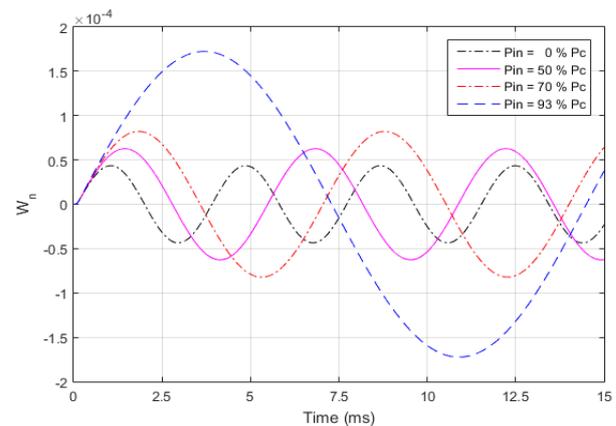


Fig. 14 Unit impulse responses of C10 specimen

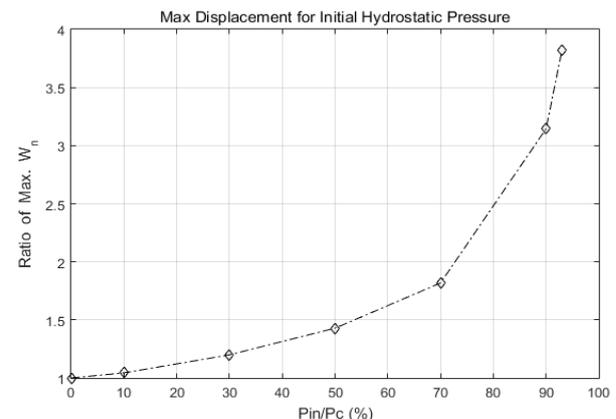


Fig. 15 Maximum displacements of C10 specimen under various hydrostatic pressure for unit impulse

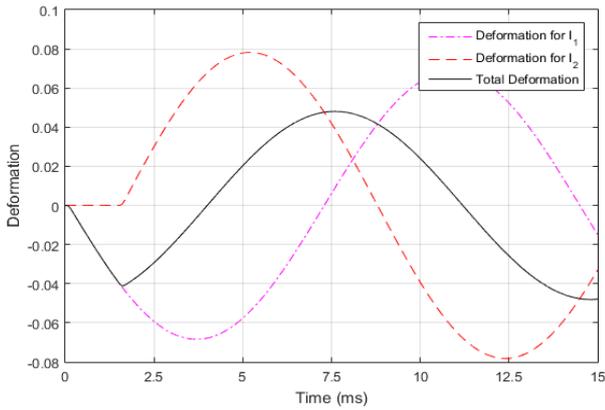


Fig. 16 Dynamic response of C10 specimen due to the superposed implosion pressure pulse

Table 2 Results of analysis for 2-model implosion test

Main cylinder-Initiator	$P_{in}/P_c$ (MPa)	$w_{max}/R$	$\Delta w/R$	Results
C9 - C8	0.66 (1.40/2.11)	0.009	$<< 0.084$	Safe
C10 - C9	0.93 (2.11/2.27)	0.048	$> 0.035$	Collapse

두 가지 경우에 대한 해석 결과 즉 붕괴 여부 판정은 실제 실험 결과 및 관찰된 현상과 그대로 일치되므로 제안된 초기 정수압을 고려한 압력 선체의 동적 좌굴 안정성 검토 절차가 합리적인 임을 입증하고 있는 것으로 사료된다.

## 6. 결 언

잠수함 부가장비의 내파 상황을 상정하여 초기 정수압이 작용하고 있는 심해 정수압 하에서 내파 충격파를 받는 내압선체의 동적 좌굴 거동을 해석적으로 추정하기 위한 연구를 수행하였다.

초기 정수압이 충격파를 받는 내압 선체의 구조 거동에 미치는 영향을 정량적으로 추정하여 부가장비 내파 시 발생하는 충격파에 의해 인접한 내압 선체가 급속한 동적 좌굴 붕괴로 이어질 가능성을 검토하였다.

외부 정수압 환경 하에서 추가적인 충격파를 받는 원통 실린더의 운동 방정식을 비선형 연립 미분방정식 형태로 정식화하였고 이를 합리적으로 해석하기 위하여 Runge-Kutta 법 기반 수치해석 기법을 개발/적용하였다. 또한 압력 챔버에서 수행된 복수 모델 내파 실험 결과를 본 연구에서 제안된 동적 안정성 검토 기법에 의한 해석 결과와 비교 분석함으로써 물리적 거동을 고찰하는 한편, 기법의 타당성을 입증하였다.

현재까지 얻어진 해석해는 실린더가 원주 방향으로 균일하게 축대칭으로 작용하는 내파에 의한 충격 입력을 받는 것으로 가정하고 있다. 내파 충격파의 크기는 내파 원점에서 떨어진 거리에 반비례하게 되므로 내압 선체가 내파 원점에서 조금 떨어진 경우라면 큰 문제없이 적용될 수 있으나 매우 근접한 상태라면 원주

방향 위치에 따라 내파 원점과의 거리가 상당한 차이가 있을 수 있기 때문에 비 축대칭 문제로 확장할 필요가 있다. 따라서 이 문제를 해결하기 위해 향후 비 축대칭 충격파를 받는 내압 선체의 동적 좌굴 관련 연구가 필요한 것으로 사료된다.

## 후 기

이 연구는 국방과학연구소 “수중 근접폭발 특화연구실” 과제와 충남대학교 자체연구과제의 지원으로 수행되었습니다.

## References

Bitter, N.P. & Shepherd, J.E., 2014. Dynamic buckling and fluid - structure interaction of submerged tubular structures In: Shukla, A., Rajapakse, D.S., Hynes, M.E. (Eds.), *Blast Mitigation - Experimental and Numerical Studies*. Springer, NewYork, pp.189-227.

Damazo, J., Porowski, R., Shepherd, J.E. & Inaba, K., 2010. Fluid-structure interaction of submerged tubes subjected to impact generated stress waves, *16th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, June 27-July 2, 2010, State College, Pennsylvania, USA.

Gupta, S., Matos, H., LeBlanc, J. and Shukla, A., 2016. Shock initiated instabilities in underwater cylindrical structures, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 95, pp.188-212.

Lindberg, H. & Florence, A., 1987. *Dynamic Pulse Buckling-Theory and Experiment*, Martinus Nijhoff Publishers.

Matos, H., Gupta, S. & Shukla, A., 2018. Structural instability and water hammer signatures from shock-initiated implosions in confining environments, *Mechanics of Materials*, 116, 169-179.

Nho, I.S., Ryu, J.W., Lim, S.J., & Cho, S.R., 2017. Buckling analysis of circular cylinders with initial imperfection subjected to hydrostatic pressure. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 54(3), pp.267-273.

Nho, I.S., Cho, S.R., Kim, Y.Y., Han, S. & Cho, Y.S., 2020. Implosion Analysis of Circular Cylinder using Simplified Model. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 57(1), pp.8-14.

Turner, S. & Ambrico, J., 2013. Underwater implosion of cylindrical metal tubes. *Journal of Applied Mechanics*, 80, 011013, pp.1-11.

